Universidade Estadual de Maringá
Programa de Pós-graduação em Bioestatística

KELLY VANESSA PAREDE BARCO

A DISTRIBUIÇÃO LINDLEY INVERSA POTÊNCIA: PROPRIEDADES E APLICAÇÕES

Dissertação de Mestrado

Maringá - Paraná
fevereiro, 2016

KELLY VANESSA PAREDE BARCO

A DISTRIBUIÇÃO LINDLEY INVERSA POTÊNCIA: PROPRIEDADES E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Bioestatística do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Bioestatística.
Orientador: Prof. Dr. Josmar Mazucheli
Coorientador: Prof. Dr. Vanderly Janeiro

Maringá - Paraná
fevereiro, 2016

KELLY VANESSA PAREDE BARCO

A Distribuição Lindley Inversa Potência: Propriedades e Aplicações

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Bioestatística do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Bioestatística.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Josmar Mazucheli
Universidade Estadual de Maringá - UEM

Prof. Dr. Fernando Antonio Moala
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" – UNESP

Profª. Dra. Terezinha Aparecida Guedes
Universidade Estadual de Maringá - UEM

Maringá, 17 de fevereiro de 2016.

Dedico este trabalho a todos aqueles que estiveram ao meu lado durante essa jornada.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, que me permitiu chegar até aqui, sendo meu refúgio nos momentos de fraqueza, e me proporcionando a força necessária para vencer essa batalha.

A minha família, em especial ao meu pai e minha irmã que estiveram ao meu lado durante todo esse processo, me incentivando, dando forças, apoiando nos momentos difíceis, tendo paciência comigo nos momentos de tensão. Com certeza, sem eles ao meu lado eu não teria conseguido.

A minha mãe (*"in memoriam"*), que sempre foi a minha maior incentivadora e nunca mediu esforços para me apoiar e ajudar a realizar os meus sonhos. Uma grande guerreira, que em ensinou a não medir esforços para conquistar aquilo que almejamos. Nunca teria conseguido se não fosse pelos seus ensinamos e exemplo de vida.

Aos meus amigos, que são meu ponto de equilíbrio. Aqueles que me ajudaram a levantar nas dificuldades, e estiveram ao meu lado para comemorar os bons momentos. Em especial a Viviane, que por um ano dividiu comigo as angústias e fraquezas dessa batalha, mas que com seu bom humor sempre me fez ver o lado bom, e me proporcionou momentos incríveis que ficaram registrados na história da nossa amizade, e ao Matheus, que esteve ao meu lado nos momentos mais difíceis, fosse pra estudar, pra dar uma palavra de incentivo, ou um puxão de orelha quando eu pensava em desistir.

Aos colegas de trabalho da Faculdade Unicampo, pelas trocas de experiências, pela compreensão e pelo apoio prestado.

Aos meus orientadores, Professor Josmar Mazucheli e Professor Vanderly Janeiro, por acreditarem em mim, me ajudarem em todo o processo de construção da dissertação, e por dividirem os seus conhecimentos.

A todos os professores do PBE, que tanto contribuíram com a minha formação.

A Professora Isolde Previdelli, que acreditou em mim desde a entrevista de seleção, me deu seu voto de confiança, cobrou dedicação e me incentivou. Pelas conversas que

tivemos, pelo apoio prestado, pelas palavras de carinho e confiança que me fizeram mais forte, por ter acreditado que eu era capaz, mesmo quando eu mesma achava que não conseguiria. Enfim, por ter sido minha "mãezona".

Enfim, a todos que em algum momento estiveram ao meu lado durante essa jornada. Todos, de alguma maneira, contribuíram nessa conquista, pois sozinha eu não seria capaz.

"Bom mesmo é ir à luta com determinação, abraçar a vida com paixão, perder com classe e vencer com ousadia, por que o mundo pertence a quem se atreve. E a vida é muito para ser insignificante."

(Augusto Branco)

Lista de ilustrações

Figura 1 – Comportamento da função densidade e de risco da distribuição Lindley para diferentes valores de β. 19
Figura 2 – Comportamento da função densidade e de risco da distribuição Lindley inversa para diferentes valores de β. 20
Figura 3 – Comportamento da função densidade da distribuição Lindley potência para diferentes valores de α e β. 21
Figura 4 – Comportamento da função de risco da distribuição Lindley potência para diferentes valores de α e β. 21
Figura 5 – Comportamento da função densidade da distribuição Lindley inversa potência para diferentes valores de α e β. 23
Figura 6 – Comportamento da função de risco da distribuição Lindley inversa potência para diferentes valores de α e β. 24
Figura 7 – Comportamento da função de distribuição acumulada da distribuição Lindley inversa potência para diferentes valores de α e β. 25
Figura 8 – Vícios de $\widehat{\alpha}$. 31
Figura 9 – Vícios de $\widehat{\beta}$. 32
Figura 10 – Erros quadráticos médios de $\widehat{\alpha}$. 33
Figura 11 – Erros quadráticos médios de $\widehat{\beta}$ 34
Figura 12 – Distribuições ajustadas — dados 1. 36
Figura 13 – Distribuições ajustadas — dados 2. 38
Figura 14 – Distribuições ajustadas — dados 3. 40
Figura 15 – Histogramas — dados 3. 41
Figura 16 – Ajustes da distribuição Lindley inversa potência — dados 3 — mensal. . 46
Figura 17 – Histogramas — dados 3 — mensal. 47
Figura 1 – Comportamento da função densidade da distribuição Lindley inversa potência para diferentes valores de α e β. 52
Figura 2 – Comportamento da função de risco da distribuição Lindley inversa potência para diferentes valores de α e β. 53

Figura 3 – Ajustes da distribuição Lindley inversa potência com diferentes métodos de estimação — dados 1. 67
Figura 4 – Ajustes da distribuição Lindley inversa potência com diferentes métodos de estimação — dados 2. 68

Lista de tabelas

Tabela 1 – Generalizações da distribuição Lindley. 14
Tabela 2 – Conjunto de dados 1. 35
Tabela 3 – Resumo das distribuições ajustadas — dados 1. 35
Tabela 4 – Resultados dos testes de aderência — dados 1. 36
Tabela 5 – Conjunto de dados 2. 37
Tabela 6 – Resumo das distribuições ajustadas — dados 2. 37
Tabela 7 – Resultados dos testes de aderência — dados 2. 38
Tabela 8 – Resumo das distribuições ajustadas — dados 3. 39
Tabela 9 – Resultados dos testes de aderência — dados 3. 39
Tabela 10 – Resumo das distribuições ajustadas — dados 3 — Janeiro à Junho . . . 42
Tabela 11 – Resumo das distribuições ajustadas — dados 3 — Julho à Dezembro . 43
Tabela 12 – Resultados dos testes de aderência — dados 3 — Janeiro à Agosto . . 44
Tabela 13 – Resultados dos testes de aderência — dados 3 — Setembro à Dezembro 45
Tabela 1 – Estatísticas da função de distribuição empírica. 54
Tabela 2 – Forma computacional das estatísticas da função de distribuição empírica. 54
Tabela 3 – Resultados da simulação para $\alpha = 0.5$ e $\beta = 0.5$ 57
Tabela 4 – Resultados da simulação para $\alpha = 0.5$ e $\beta = 1.0$ 58
Tabela 5 – Resultados da simulação para $\alpha = 0.5$ e $\beta = 1.5$ 58
Tabela 6 – Resultados da simulação para $\alpha = 0.5$ e $\beta = 2.0$ 59
Tabela 7 – Resultados da simulação para $\alpha = 1.0$ e $\beta = 0.5$ 59
Tabela 8 – Resultados da simulação para $\alpha = 1.0$ e $\beta = 1.0$ 60
Tabela 9 – Resultados da simulação para $\alpha = 1.0$ e $\beta = 1.5$ 60
Tabela 10 – Resultados da simulação para $\alpha = 1.0$ e $\beta = 2.0$ 61
Tabela 11 – Resultados da simulação para $\alpha = 1.2$ e $\beta = 0.5$ 61
Tabela 12 – Resultados da simulação para $\alpha = 1.2$ e $\beta = 1.0$ 62
Tabela 13 – Resultados da simulação para $\alpha = 1.2$ e $\beta = 1.5$ 62
Tabela 14 – Resultados da simulação para $\alpha = 1.2$ e $\beta = 2.0$ 63
Tabela 15 – Conjunto de dados 1. 64

Tabela 16 – Conjunto de dados 2. 64
Tabela 17 – Resumo dos ajustes — dados 1. 64
Tabela 18 – Resumo dos ajustes — dados 2. 65
Tabela 19 – Resultados dos testes de aderência — dados 1. 65
Tabela 20 – Resultados dos testes de aderência — dados 2. 66

Sumário

1 Resumo Geral 12
1.1 Introdução 12
1.2 Justificativa 14
1.3 Objetivos 15
1.3.1 Objetivo Geral 15
1.3.2 Objetivos Específicos 15
1.4 Metodologia 15
1.5 Resultados 15
1.6 Conclusão 16
1.7 Propostas futuras 16
2 A Distribuição Lindley Inversa Potência 17
2.1 Introdução 18
2.2 Distribuição Lindley Inversa Potência 21
2.3 Comportamento das Funções Densidade e de Risco 22
2.4 Momentos 25
2.5 Função Quantil 25
2.6 Estimação por Máxima Verossimilhança 27
2.7 Estudo de Simulação 30
2.8 Aplicação em Dados Reais 34
2.9 Conclusão 48
3 Distribuição Lindley Inversa Potência: Diferentes Métodos de Estimação . . 49
3.1 Introdução 50
3.2 Métodos de Estimação 53
3.2.1 Método da Máxima Verossimilhança 55
3.2.2 Método de Cramér-von-Mises 55
3.2.3 Método de Kolmogorov-Smirnov 56
3.2.4 Método de Anderson-Darling 56
3.3 Estudo de Simulação 56
3.4 Aplicação em Dados Reais 63
3.5 Conclusão 69
Referências 70
A Artigo para publicação 72

Capítulo 1

Resumo Geral

1.1 Introdução

A distribuição Lindley foi introduzida por Lindley (1958) no contexto da inferência Bayesiana. Por muitos anos, essa distribuição foi utilizada apenas em processos de composição junto à distribuição de Poisson para dados discretos. Ghitany, Atieh e Nadarajah (2008), no contexto de análise de sobrevivência, estudaram as propriedades e aplicações dessa distribuição, mostrando que ela possui propriedades matemáticas mais flexíveis do que as da distribuição exponencial. Além disso, no estudo considerando um conjunto de dados reais de tempos de espera (em minutos) de clientes em uma agência bancária, a distribuição Lindley mostrou melhor ajuste aos dados do que a distribuição exponencial.

Diversas generalizações da distribuição Lindley vêm sendo propostas na literatura. Tais distribuições são mais flexíveis em termos do comportamento da função densidade e de risco. Dentre as diversas variações temos a distribuição Lindley generalizada com três parâmetros, proposta por Zakerzadeh e Dolati (2009), que possui formas crescente, decrescente ou de banheira para a função de risco. Essa distribuição foi aplicada à tempos de vida de componentes eletrônicos em um teste de vida acelerado, e número de ciclos até a ruptura de um fio submetido a uma certa tensão. Em ambos os casos, a distribuição Lindley generalizada se mostrou mais apropriada do que as distribuições gama, Weibull e log-normal.

Nadarajah, Bakouch e Tahmasbi (2011) apresentaram a distribuição Lindley generalizada com dois parâmetros, usada na modelagem de tempos de vida como uma alternativa às distribuições gama, log-normal e Weibull. Essa distribuição têm função de risco com comportamento em forma de banheira. Nesse trabalho, a distribuição Lindley generalizada foi aplicada em dados de tempos de alívio da dor em pacientes que receberam um analgésico. Neste mesmo ano, a distribuição Lindley ponderada com dois parâmetros

foi proposta por Ghitany et al. (2011) para modelagem de dados de sobrevivência, cuja função de risco possui forma crescente ou de banheira. Os autores ajustaram a distribuição a dados de tempos de sobrevivência (em dias) de cobaias infectadas com virulência do bacilo da tuberculose, e a dados de mortalidade agrupada do pássaro Melro-preto. De acordo com os resultados da análise, a distribuição Lindley ponderada apresentou ajuste mais adequado do que as distribuições Weibull, exponencial potência e Lindley.

Bakouch et al. (2012) propôs a distribuição Lindley extendida com três parâmetros, que possui forma crescente, decrescente, unimodal e de banheira para a função de risco. Ao aplicá-la a dados de intervalo entre falhas do sistema de ar condicionado em aeronaves e tempo de falhas em para-brisa de aviões, mostrou ter um melhor ajuste que as distribuições Weibull, gama, exponencial exponenciada, Weibull modificada e exponencial complementar potência.

Proposta por Shanker e Mishra (2013), a distribuição quase Lindley de dois parâmetros também se mostrou melhor que a distribuição Lindley devido ao comportamento de sua função de vida média residual, da função de risco, que possui forma monótona crescente, e da ordenação estocástica. Essa distribuição também foi aplicada ao conjunto de dados com tempos de sobrevivência (em dias) de cobaias infectadas com virulência do bacilo da tuberculose, e a um conjunto de dados de mortalidade agrupada do pássaro Melro-preto.

Uma nova distribuição denominada Lindley generalizada de três parâmetros foi proposta por Elbatal, Merovci e Elgarhy (2013) e aplicada a um conjunto de dados sem censura de tempos de remissão (em meses) de pacientes com câncer de bexiga e ao conjunto de dados com tempos de sobrevivência (em dias) de cobaias infectadas com virulência do bacilo da tuberculose. Nos dois casos mostrou um melhor ajuste aos dados do que a distribuição Lindley. Essa distribuição possui formas crescente, decrescente e de banheira para a sua função de risco. Há ainda a distribuição Lindley transmutada que foi proposta por Merovci (2013). Essa distribuição possui um único parâmetro e função de risco decrescente, e ao ser aplicada a dados de tempos de remissão de pacientes com câncer de bexiga mostrou um melhor ajuste que as distribuições Lindley e exponencial.

Ghitany et al. (2013) propôs a distribuição Lindley potência com dois parâmetros, cuja função densidade têm comportamentos decrescente, unimodal ou decrescente-crescente-decrescente, enquanto que a função de risco pode ser decrescente, crescente ou decrescente-crescente-decrescente. Em uma aplicação considerando dados de resistência a tração de fibras de carbono sob tensão, a distribuição Lindley potência obteve um melhor ajuste que as distribuições Gompertz, gama e Weibull.

Uma recente modificação é a distribuição Lindley inversa com um parâmetro, proposta por Sharma et al. (2015), cujas funções densidade e de risco possuem comportamento unimodal. Em uma aplicação considerando dados de sobrevivência de pacientes

com câncer de cabeça e pescoço, essa distribuição mostrou um ajuste melhor do que a distribuição Rayleigh inversa.

Além dessas distribuições apresentadas acima, diversas outras generalizações vêm sendo propostas. Na Tabela a seguir listamos algumas das generalizações obtidas a partir da distribuição Lindley:

Tabela 1 – Generalizações da distribuição Lindley.

Distribuição	Autor(es)
Lindley	Lindley (1958)
Lindley generalizada	Zakerzadeh e Dolati (2009)
Lindley generalizada	Nadarajah, Bakouch e Tahmasbi (2011)
Lindley ponderada	Ghitany et al. (2011)
Lindley extendida	Bakouch et al. (2012)
Lindley extendida Marshall-Olkin	Ghitany et al. (2012)
Quase Lindley	Shanker e Mishra (2013)
Nova Lindley generalizada	Elbatal, Merovci e Elgarhy (2013)
Lindley transmutada	Merovci (2013)
Lindley potência	Ghitany et al. (2013)
Lindley truncada	Singh, Singh e Sharma (2014)
Beta-Lindley	Merovci e Sharma (2014)
Lindley inversa	Sharma et al. (2015)
Lindley potência exponenciada	Ashour e Eltehiwy (2015)

A partir disso, no presente trabalho apresentamos uma nova distribuição de probabilidade, obtida a partir da aplicação da transformação potência na distribuição Lindley inversa. No Capítulo 2 é apresentado um estudo das propriedades matemáticas dessa nova distribuição e de seus estimadores de máxima verossimilhança, em termos de vício e erro quadrático médio. Além disso, verificamos a qualidade de ajuste dessa distribuição em comparação a outras distribuições apresentadas na literatura por meio de aplicações em dados reais. No Capítulo 3 é apresentado um estudo da performance de métodos de estimação alternativos em comparação ao método da máxima verossimilhança ao serem aplicados à nova distribuição proposta, utilizando como critério de comparação os valores do vício e erro quadrático médio. No Apêndice se encontra o artigo submetido para possível publicação na revista *Communications in Statistics - Simulation and Computation*.

1.2 Justificativa

Diante da necessidade de se obter distribuições de probabilidade mais flexíveis em termos do comportamento das funções densidade e de risco, que permitam um melhor ajuste a dados reais de análise de sobrevivência, propomos neste trabalho a distribuição Lindley inversa potência como uma nova alternativa.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo Geral

Propor uma nova distribuição de probabilidade, aqui denominada de Lindley inversa potência, a fim de obter maior flexibilidade em termos do comportamento da função densidade e de risco em comparação a distribuição Lindley inversa.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Propor uma nova generalização da distribuição Lindley que é obtida a partir da aplicação da transformação potência na variável aleatória com distribuição Lindley inversa;
- Caracterizar e estudar algumas propriedades desta nova distribuição;
- Estudar via simulação Monte Carlo algumas propriedades dos estimadores de máxima verossimilhança, em termos de vício e erro quadrático médio;
- Apresentar aplicações em dados reais para verificar a qualidade de ajuste da distribuição Lindley inversa potência em comparação a outras distribuições apresentadas na literatura;
- Avaliar a performance de diferentes métodos de estimação, em contrapartida a método da máxima verossimilhança, em termos de vício e erro quadrático médio;
- Aplicar esses métodos alternativos em conjuntos de dados em que a distribuição Lindley inversa potência obteve bons ajustes.

1.4 Metodologia

Realizou-se um estudo das principais propriedades matemáticas da distribuição Lindley inversa potência, caracterizando o comportamento das suas funções densidade e de risco, momentos, função quantil e estimadores de máxima verossimilhança. Para o estudo das propriedades de seus estimadores de máxima verossimilhança e dos métodos de estimação alternativos foi utilizada simulação de Monte Carlo, e considerados os valores do vício e erro quadrático médio.

1.5 Resultados

Foi possível verificar que a distribuição Lindley inversa potência possui boas propriedades para seus estimadores de máxima verossimilhança, pois em todos os cenários estudados verificamos que seus estimadores são não viciados assintoticamente. Além disso,

ao ser aplicada nos conjuntos de dados reais, mostrou um boa qualidade de ajuste, superior aos das demais distribuições consideradas. Ao final, verificamos que o método de Anderson-Darling é uma boa alternativa na estimação dos parâmetros da distribuição Lindley inversa potência, quando consideramos o vício e erro quadrático médio como critérios de comparação.

1.6 Conclusão

A partir dos estudos realizados sobre a distribuição Lindley inversa potência verifica-se que ela possui boas propriedades para seus estimadores, o que a torna uma forte concorrente para as demais distribuições de probabilidade testadas, sendo uma boa alternativa na modelagem de dados de sobrevivência.

1.7 Propostas futuras

Com o objetivo de dar continuidade ao estudo da distribuição Lindley inversa potência, estabelecemos como propostas para um trabalho futuro:

(i) Estudar o tamanho e poder dos testes de Wald, da razão de verossimilhança e escore em problemas de discriminação entre as distribuições Lindley inversa e Lindley inversa potência;

(ii) Obter a forma discreta da distribuição Lindley inversa potência e realizar um estudo de suas propriedades, verificando sua aplicabilidade.

Capítulo 2

A Distribuição Lindley Inversa Potência

Resumo

Diversas distribuições de probabilidade vêm sendo propostas na literatura, principalmente, com o objetivo de se obter modelos mais flexíveis em termos do comportamento das funções densidade e de risco. Recentemente, foi proposta por (GHITANY et al., 2013) uma nova generalização da distribuição Lindley, chamada distribuição Lindley potência. Outra generalização foi proposta por Sharma et al. (2015), conhecida como distribuição Lindley inversa. Neste trabalho propomos uma nova distribuição que é obtida a partir dessas duas generalizações e denominada de distribuição Lindley inversa potência. Algumas propriedades desta nova distribuição e o estudo do comportamento dos estimadores de máxima verossimilhança são apresentados e discutidos. Ao final é realizada uma aplicação considerando dados reais e uma comparação com os ajustes obtidos por outras distribuições já conhecidas. Nas aplicações constatamos que a distribuição Lindley inversa potência é uma boa alternativa na modelagem de dados de sobrevivência.

Palavras-chave: Lindley inversa potência, Estimação via máxima verossimilhança, Simulação Monte Carlo.

Abstract

Several probability distributions have been proposed in the literature, especially with the aim of obtaining models that are more flexible relative to the behaviors of the density and hazard rate functions. Recently, a new generalization of the Lindley distribution was proposed by (GHITANY et al., 2013), called power Lindley distribution. Another generalization was proposed by (SHARMA et al., 2015), known as inverse Lindley distribution. In this paper, a new distribution is proposed, which is obtained from these two generalizations and named

power inverse Lindley distribution. Some properties of this new distribution and study of the behavior of maximum likelihood estimators are presented and discussed. It is also applied considering real data and compared with the fits obtained for already-known distributions. When applied, the power inverse Lindley distribution was found to be a good alternative for modeling survival data.

Key-words: Lindley distribution, Maximum likelihood estimation, Monte Carlo simulation, Survival analysis.

2.1 Introdução

A distribuição Lindley proposta por Lindley (1958) possui função densidade obtida pela mistura da distribuição exponencial, com parâmetro de escala β, e a distribuição gama, com parâmetro de forma igual a 2 e de escala β. Então, sua função densidade é definida por:

$$f(x \mid \beta) = pf_1(x \mid \beta) + (1-p)f_2(x \mid 2, \beta),$$

em que:

$$p = \frac{\beta}{1+\beta}, \quad f_1(x \mid \beta) = \beta e^{-\beta x} \quad \text{e} \quad f_2(x \mid 2, \beta) = \beta^2 x e^{-\beta x},$$

portanto:

$$f(x \mid \beta) = \frac{\beta^2}{1+\beta}(1+x)e^{-\beta x}, \tag{2.1}$$

em que $x > 0$ e $\beta > 0$.

A função de distribuição acumulada e de risco são definidas, respectivamente, por:

$$F(x \mid \beta) = 1 - \left(1 + \frac{\beta x}{1+\beta}\right) e^{-\beta x}, \tag{2.2}$$

$$h(x \mid \beta) = \frac{\beta^2(1+x)}{\beta(1+x)+1}. \tag{2.3}$$

O comportamento da função densidade e de risco para alguns valores de β são apresentados na Figura 1. Conforme pode ser observado, a distribuição Lindley possui forma unimodal ou decrescente para a função densidade. Além disso, assim como a distribuição exponencial, a distribuição Lindley tem função de risco com um único comportamento, sendo este monótono crescente.

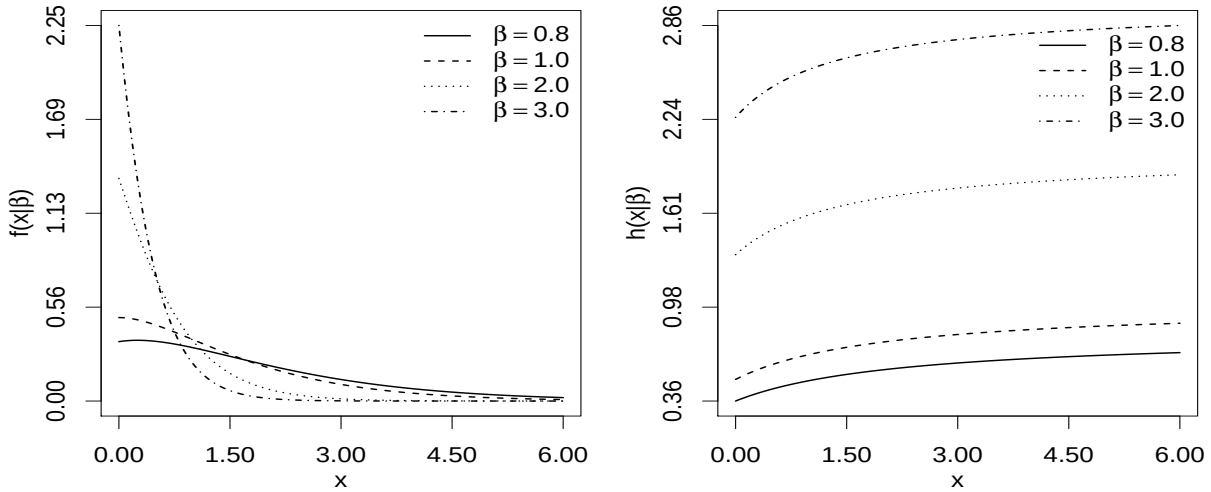


Figura 1 – Comportamento da função densidade e de risco da distribuição Lindley para diferentes valores de β.

Ghitany, Atieh e Nadarajah (2008) estudaram as propriedades e aplicações dessa distribuição no contexto de análise de sobrevivência, e mostraram que ela possui propriedades matemáticas mais flexíveis do que as da distribuição exponencial.

Desde então, diversas outras generalizações da distribuição Lindley vêm sendo propostas com o objetivo de obter distribuições de probabilidade mais flexíveis em termos do comportamento da função densidade e de risco.

A distribuição Lindley inversa, proposta por Sharma et al. (2015), considera o inverso de uma variável aleatória com distribuição Lindley. Mais especificamente, se uma variável aleatória Y possui distribuição Lindley, então a variável aleatória $X = 1/Y$ segue uma distribuição Lindley inversa com funções densidade, de distribuição acumulada e de risco definidas, respectivamente, por:

$$f(x \mid \beta) = \frac{\beta^2}{1+\beta}\left(\frac{1+x}{x^3}\right)e^{-\frac{\beta}{x}}, \tag{2.4}$$

$$F(x \mid \beta) = \left(1+\frac{\beta}{1+\beta}\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{\beta}{x}}, \tag{2.5}$$

$$h(x \mid \beta) = \frac{\beta^2(1+x)}{x^2\big[-\beta+x(1+\beta)(e^{\beta/x}-1)\big]}, \tag{2.6}$$

em que $x > 0$ e $\beta > 0$.

Ilustramos na Figura 2 o comportamento das funções densidade e de risco considerando diferentes valores de β. Pode-se observar que ambas as funções possuem comportamento unimodal. Uma característica importante da distribuição Lindley inversa é, justamente, de permitir o ajuste de risco unimodal mesmo sendo especificada por um parâmetro. Dada esta característica, ela pode ser uma alternativa às distribuições log-normal, log-logística, inversa-gaussiana, dentre outras, na modelagem de dados de sobrevivência.

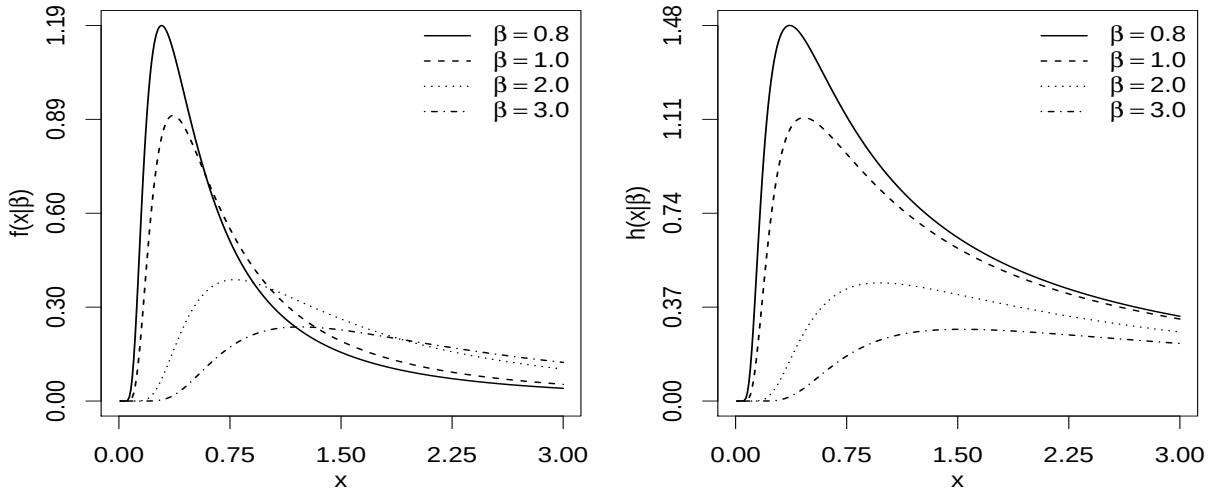


Figura 2 – Comportamento da função densidade e de risco da distribuição Lindley inversa para diferentes valores de β.

Outra generalização é a distribuição Lindley potência, que considera a potência de uma variável aleatória com distribuição Lindley (GHITANY et al., 2013). Ou seja, se uma variável aleatória *Y* possui distribuição Lindley, então a variável aleatória $X = Y^{\frac{1}{\alpha}}$ segue uma distribuição Lindley potência.

Assim como a distribuição Lindley, a distribuição Lindley potência pode ser obtida pela mistura de duas distribuições, sendo elas, a distribuição Weibull, com parâmetro de forma α e de escala β e a distribuição gama generalizada, com parâmetros de forma 2 e α, e de escala β, em específico:

$$f(x \mid \alpha, \beta) = pf_1(x \mid \alpha, \beta) + (1-p)f_2(x \mid 2, \alpha, \beta),$$

em que:

$$p = \frac{\beta}{1+\beta}, \quad f_1(x \mid \alpha, \beta) = \alpha\beta x^{\alpha-1}e^{-\beta x^{\alpha}} \quad \text{e} \quad f_2(x \mid 2, \alpha, \beta) = \alpha\beta^2 x^{2\alpha-1}e^{-\beta x^{\alpha}},$$

portanto:

$$f(x \mid \alpha, \beta) = \frac{\alpha\beta^2}{1+\beta}(1+x^{\alpha})x^{\alpha-1}e^{-\beta x^{\alpha}}, \tag{2.7}$$

em que $x > 0$ e $\alpha, \beta > 0$.

A função de distribuição acumulada e de risco são definidas, respectivamente, por:

$$F(x \mid \alpha, \beta) = 1 - \left(1 + \frac{\beta x^{\alpha}}{1+\beta}\right)e^{-\beta x^{\alpha}}, \tag{2.8}$$

$$h(x \mid \alpha, \beta) = \alpha\beta^2 \frac{(1+x^{\alpha})x^{\alpha-1}}{\beta(1+x^{\alpha})+1}. \tag{2.9}$$

Note que a distribuição Lindley é um caso especial da distribuição Lindley potência para $\alpha = 1$.

O comportamento da função densidade e de risco para alguns valores de α e β são apresentados na Figuras 3 e 4, respectivamente. Conforme pode ser observado nos gráficos, a função densidade tem comportamento decrescente, unimodal ou decrescente-crescente-decrescente, enquanto que a função de risco pode ser decrescente, crescente ou decrescente-crescente-decrescente, dependendo dos valores tomados para α e β.

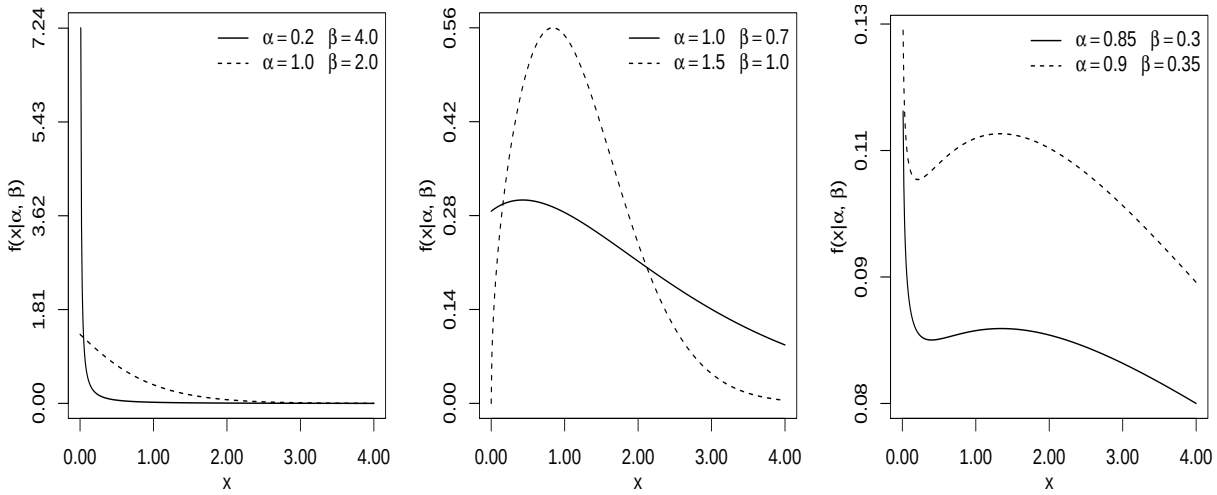


Figura 3 – Comportamento da função densidade da distribuição Lindley potência para diferentes valores de α e β.

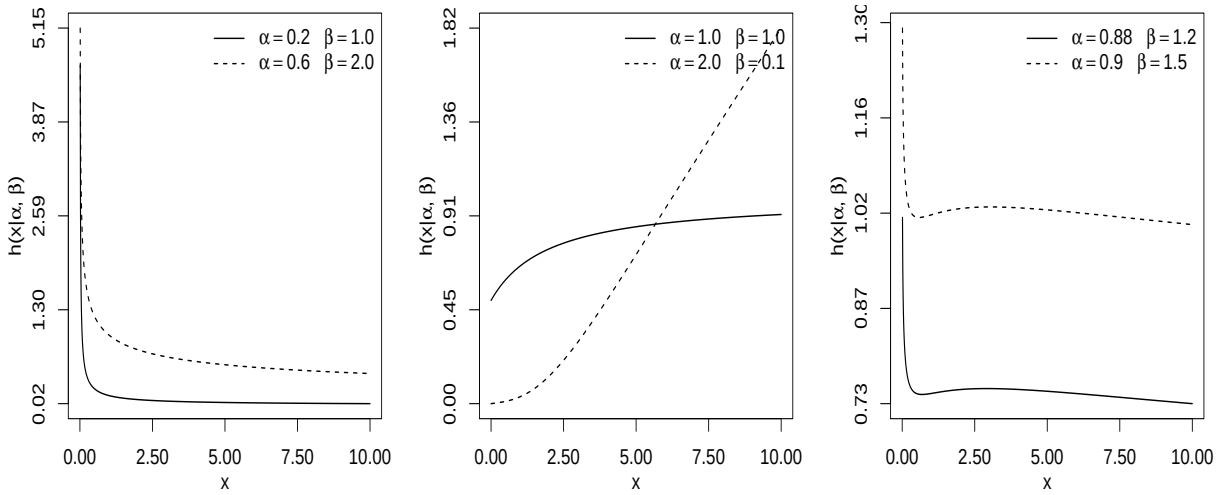


Figura 4 – Comportamento da função de risco da distribuição Lindley potência para diferentes valores de α e β.

2.2 Distribuição Lindley Inversa Potência

A partir da distribuição Lindley inversa, propomos neste trabalho a distribuição Lindley inversa potência, que é obtida pela aplicação da transformação potência nessa distribuição. Dessa forma, introduzimos um novo parâmetro a distribuição existente com o objetivo de obter um modelo mais flexível em termos da função densidade e de risco,

Para isso, considere uma variável aleatória *Y* com distribuição Lindley inversa, então a variável aleatória $X = Y^{\frac{1}{\alpha}}$ segue uma distribuição Lindley inversa potência. Essa nova distribuição é obtida a partir da seguinte equação:

$$f_X(x) = f_Y(g^{-1}(x)) \left| \frac{d}{dx} g^{-1}(x) \right|. \tag{2.10}$$

Considere então:

$$g(Y) = Y^{\frac{1}{\alpha}} \Longleftrightarrow g^{-1}(X) = X^{\alpha}.$$

Substituindo $g^{-1}(X)$ na equação (2.10) obtemos a função densidade da distribuição Lindley inversa potência, dada por:

$$f(x \mid \alpha, \beta) = \frac{\alpha\beta^2}{1+\beta} \left(\frac{1+x^{\alpha}}{x^{2\alpha+1}} \right) e^{-\frac{\beta}{x^{\alpha}}}, \tag{2.11}$$

em que $x > 0$ e $\alpha, \beta > 0$, sendo α o parâmetro de locação e β o parâmetro de escala.

A função de distribuição acumulada e de risco da distribuição Lindley inversa potência são definidas, respectivamente, por:

$$F(x \mid \alpha, \beta) = \left(1 + \frac{\beta}{1+\beta} \frac{1}{x^{\alpha}} \right) e^{-\frac{\beta}{x^{\alpha}}}, \tag{2.12}$$

$$h(x \mid \alpha, \beta) = \frac{\alpha\beta^2(1+x^{-\alpha})}{x\big[-\beta + x^{\alpha}(1+\beta)(e^{\frac{\beta}{x^{\alpha}}} - 1)\big]}. \tag{2.13}$$

Note que a distribuição Lindley inversa é um caso especial da distribuição Lindley inversa potência, que é obtida tomando $\alpha = 1$.

O presente artigo está organizado da seguinte maneira: na Seções 2.2 à 2.5 é apresentado um estudo sobre o comportamento das funções densidade e de risco, dos momentos, da função quantil e dos estimadores de máxima verossimilhança da distribuição Lindley inversa potência, respectivamente. Na Seção 2.6 é realizado um estudo de simulação com o objetivo de se avaliar o comportamento das estimativas de máxima verossimilhança em termos do vício e erro quadrático médio dos parâmetros. Na Seção 2.7 são apresentados três exemplos utilizando dados reais em que é comparado o ajuste obtido pela distribuição Lindley inversa potência com algumas outras distribuições. Para finalizar, a Seção 2.8 apresenta algumas conclusões sobre a distribuição proposta.

2.3 Comportamento das Funções Densidade e de Risco

Na Figura 5 podemos observar o comportamento da função densidade de probabilidade da distribuição Lindley inversa potência para diferentes valores de α e β, mostrando que a função densidade (2.11) é unimodal em *x*.

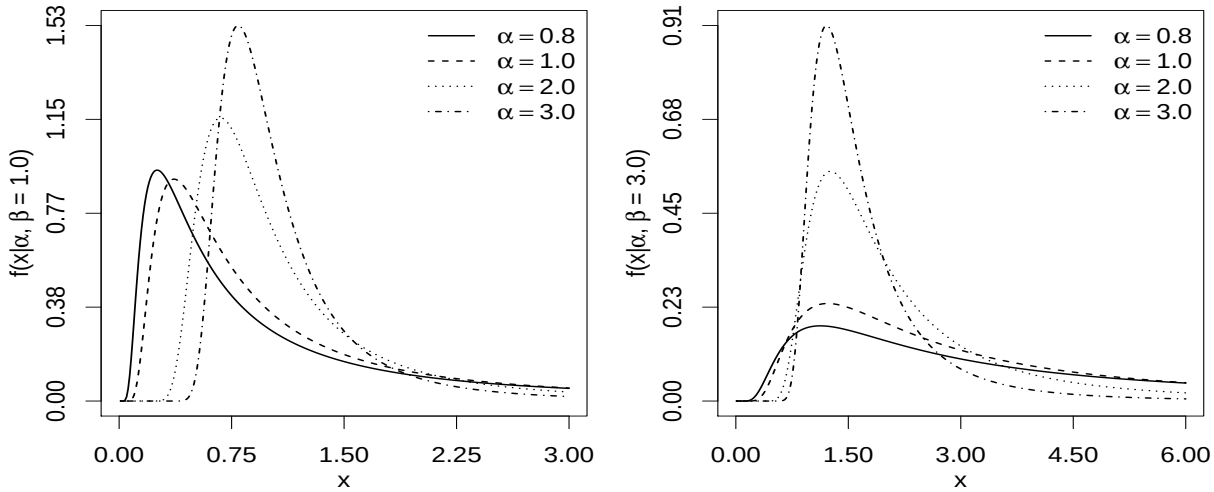


Figura 5 – Comportamento da função densidade da distribuição Lindley inversa potência para diferentes valores de α e β.

Para determinar a moda da função densidade (2.11) da distribuição Lindley inversa potência é preciso encontrar o ponto de máximo dessa função. Logo, devemos determinar o ponto onde a primeira derivada da função densidade seja nula.

Assim, a primeira derivada da função (2.11) é dada por:

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{\alpha\beta^2}{1+\beta}\frac{e^{-\frac{\beta}{x^\alpha}}}{x^{3\alpha+2}}\psi(x^\alpha), \tag{2.14}$$

no qual:

$$\psi(x^\alpha) = ax^{2\alpha} + bx^\alpha + c, \quad x^\alpha > 0, \tag{2.15}$$

com:

$$a = -(\alpha+1), \quad b = \alpha\beta - 2\alpha - 1, \quad c = \alpha\beta.$$

Note que $\psi(x^\alpha)$ é uma função quadrática. Observamos que $\psi(x^\alpha) = 0$ implica em $\frac{d}{dx}f(x) = 0$. Então, para determinar a moda da função densidade é necessário encontrar as raízes da função (2.15).

Dessa forma, como $a < 0$, temos que a função (2.15) é um parábola com concavidade voltada para baixo, então possui ponto de máximo. Observe que $\psi(0) = c$ e $c > 0$, logo, a parábola intercepta o eixo das ordenadas apenas em valores positivos, o que nos garante que o ponto de máximo dado por $x^\alpha = -\frac{b}{2a}$ sempre será positivo, e consequentemente teremos $b > 0$. Além disso, verificamos que é possível determinar duas raízes para a função, sendo uma negativa e outra positiva. Entretanto, como $x > 0$ apenas a raiz positiva é de interesse, e é definida por:

$$x^\alpha = \frac{(\alpha\beta - 2\alpha - 1) + \sqrt{(\alpha\beta - 2\alpha - 1)^2 + 4(\alpha+1)(\alpha\beta)}}{2(\alpha+1)}. \tag{2.16}$$

De (2.16) obtemos o valor de x^α que zera a função (2.15), consequentemente, temos o valor de x em que (2.14) é nula, isto é, a moda da função densidade da distribuição Lindley inversa potência.

Com relação a função de risco da distribuição Lindley inversa potência, apresentada na Figura 6, observamos que possui forma de banheira invertida, logo, é unimodal em *x*.

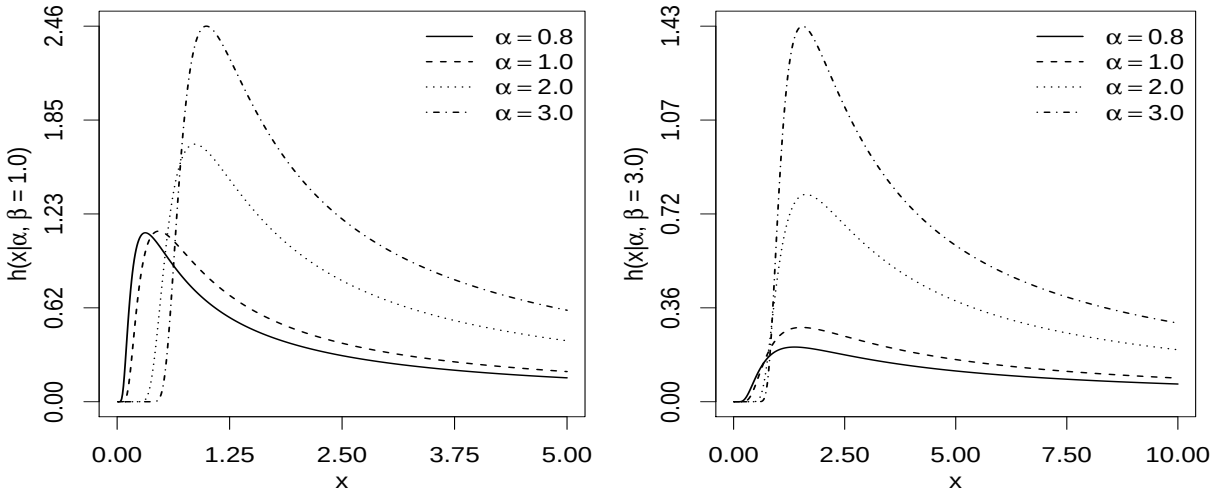


Figura 6 – Comportamento da função de risco da distribuição Lindley inversa potência para diferentes valores de α e β.

Assim como na função densidade, também podemos determinar a moda da função de risco encontrando seu ponto de máximo. A primeira derivada da função de risco é dada por:

$$\frac{d}{dx}h(x) = \frac{\alpha\beta^2 x^{-\alpha}}{x^2[-\beta + x^\alpha(1+\beta)(e^{\frac{\beta}{x^\alpha}} - 1)]^2}\psi(x^\alpha) \tag{2.17}$$

no qual:

$$\psi(x^\alpha) = ax^{2\alpha} + bx^\alpha + c, \quad x^\alpha > 0 \tag{2.18}$$

com:

$$\begin{aligned} a &= (1+\alpha)(1+\beta)(1 - e^{\frac{\beta}{x^\alpha}}), \\ b &= 1 + 2(\alpha + \beta + \alpha\beta) + (1+\beta)(\alpha\beta - 2\alpha - 1)e^{\frac{\beta}{x^\alpha}}, \\ c &= \beta(\alpha\beta e^{\frac{\beta}{x^\alpha}} + \alpha e^{\frac{\beta}{x^\alpha}} + \alpha + 1). \end{aligned}$$

Observe que $a < 0$, pois $e^{\frac{\beta}{x^\alpha}} > 1$, logo, a função (2.18) é uma parábola com concavidade voltada para baixo, então possui ponto de máximo. Além disso, $\psi(0) = c$ e $c > 0$, logo, a parábola intercepta o eixo das ordenadas apenas em valores positivos. De forma análoga ao que acontece na função densidade, a solução positiva da equação (2.18) nos dá o valor de x^α de interesse, consequentemente, temos o valor de x em que (2.17) é nula, isto é, a moda da função de risco da distribuição Lindley inversa potência.

2.4 Momentos

Para cada inteiro positivo *r*, o *r-ésimo* momento da distribuição Lindley inversa potência pode ser definido como:

$$E(X^r) = \frac{\left(\alpha\beta^{\frac{r}{\alpha}} - r\beta^{\frac{r}{\alpha}} + \alpha\beta^{\frac{r+\alpha}{\alpha}}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha-r}{\alpha}\right)}{\alpha(1+\beta)}. \tag{2.19}$$

Observe que, para que o *r-ésimo* momento exista é preciso satisfazer a restrição $\alpha > r$. De (2.19) podemos definir a média e a variância da distribuição Lindley inversa potência, respectivamente, como:

$$E(X) = \frac{\left(\alpha\beta^{\frac{1}{\alpha}} - \beta^{\frac{1}{\alpha}} + \alpha\beta^{\frac{1+\alpha}{\alpha}}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)}{\alpha(1+\beta)}, \tag{2.20}$$

$$V(X) = \frac{\left(\alpha\beta^{\frac{2}{\alpha}} - 2\beta^{\frac{2}{\alpha}} + \alpha\beta^{\frac{2+\alpha}{\alpha}}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha-2}{\alpha}\right)\alpha(1+\beta) - \left(\alpha\beta^{\frac{1}{\alpha}} - \beta^{\frac{1}{\alpha}} + \alpha\beta^{\frac{1+\alpha}{\alpha}}\right)^2\left[\Gamma\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)\right]^2}{\alpha^2(1+\beta)^2} \tag{2.21}$$

2.5 Função Quantil

Observa-se, pela Figura 7, que a função de distribuição acumulada (2.12) é estritamente crescente e contínua, de modo que a função quantil pode ser obtida pela igualdade $Q(u) = F^{-1}(u)$, no qual $0 < u < 1$.

É importante determinar a função quantil pois, a partir dela, também é possível realizar a geração das amostras para o estudo de simulação dessa distribuição.

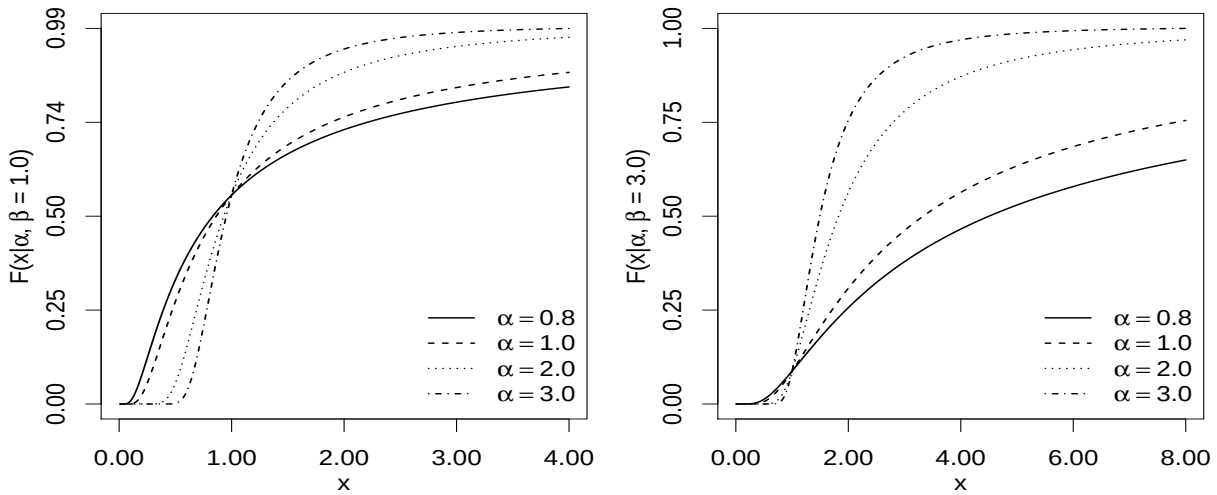


Figura 7 – Comportamento da função de distribuição acumulada da distribuição Lindley inversa potência para diferentes valores de α e β.

Teorema 2.5.1 *Para todo $\alpha, \beta > 0$, a função quantil da distribuição Lindley inversa potência é dada por:*

$$Q(u) = \left[-1 - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta} W_{-1}\left(-u(1+\beta)e^{-(1+\beta)}\right)\right]^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad 0 < u < 1,$$

em que W_{-1} é o ramo inferior da função W de Lambert.

Demonstração: Para algum $\alpha, \beta > 0$ fixos, seja $u \in (0,1)$, temos que resolver a equação $F(Q(u)) = u$, em relação a $Q(u)$, para $Q(u) > 0$. Substituindo na função (2.12), temos que:

$$\left(1 + \beta + \frac{\beta}{Q(u)^\alpha}\right) e^{-\frac{\beta}{Q(u)^\alpha}} = u(1+\beta). \tag{2.22}$$

Multiplicando ambos os lados da equação (2.22) por $-e^{-(1+\beta)}$, temos:

$$-\left(1 + \beta + \frac{\beta}{Q(u)^\alpha}\right) e^{-(1+\beta+\frac{\beta}{Q(u)^\alpha})} = -u(1+\beta)e^{-(1+\beta)}. \tag{2.23}$$

Para determinarmos a solução da equação (2.23) necessitamos utilizar a função W de Lambert (JODRA, 2010). Trata-se de uma função complexa multivalorada definida como a solução da equação $W(z)e^{W(z)} = z$, em que *z* é um número complexo.

A partir da equação (2.23) pode-se observar que $-\left(1 + \beta + \frac{\beta}{Q(u)^\alpha}\right)$ trata-se de uma função W de Lambert de argumento real $-u(1+\beta)e^{-(1+\beta)}$. Isto é:

$$W\left(-u(1+\beta)e^{-(1+\beta)}\right) = -\left(1 + \beta + \frac{\beta}{Q(u)^\alpha}\right). \tag{2.24}$$

Além disso, para qualquer $\alpha, \beta > 0$ e $x > 0$ é imediato que $1 + \beta + \frac{\beta}{Q(u)^\alpha} > 1$, e pode-se verificar também que $-u(1+\beta)e^{-(1+\beta)} \in (-\frac{1}{e}, 0)$ desde que $0 < u < 1$. Portanto, considerando-se as propriedades do ramo inferior da função W de Lambert, a equação (2.24) torna-se:

$$W_{-1}\left(-u(1+\beta)e^{-(1+\beta)}\right) = -\left(1 + \beta + \frac{\beta}{Q(u)^\alpha}\right), \tag{2.25}$$

que por sua vez implica em:

$$Q(u) = \left[-1 - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta} W_{-1}\left(-u(1+\beta)e^{-(1+\beta)}\right)\right]^{-\frac{1}{\alpha}}. \tag{2.26}$$

■

Então, a partir da equação (2.26) é possível determinar os quantis da distribuição Lindley inversa potência. Para isso basta tomarmos os diferentes valores para u.

Em específico, podemos determinar os quartis dessa nova distribuição, tomando $u = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$. Logo, os quartis da distribuição Lindley inversa potência são dados por:

$$Q\left(\frac{1}{4}\right) = \left[-1 - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta}W_{-1}\left(-\frac{1}{4}(1+\beta)e^{-(1+\beta)}\right)\right]^{-\frac{1}{\alpha}},$$

$$Q\left(\frac{1}{2}\right) = \left[-1 - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta}W_{-1}\left(-\frac{1}{2}(1+\beta)e^{-(1+\beta)}\right)\right]^{-\frac{1}{\alpha}},$$

$$Q\left(\frac{3}{4}\right) = \left[-1 - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta}W_{-1}\left(-\frac{3}{4}(1+\beta)e^{-(1+\beta)}\right)\right]^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

2.6 Estimação por Máxima Verossimilhança

Sejam $x_1, ..., x_n$ valores observados de uma variável aleatória com distribuição de probabilidade Lindley inversa potência. Então, o logaritmo da função de verossimilhança (ou simplesmente função log-verossimilhança) é dado por:

$$\begin{aligned} l(\alpha, \beta \mid \mathbf{x}) &= n[\log\alpha + 2\log\beta - \log(1+\beta)] + \sum_{i=1}^{n}\log(1+x_i^{\alpha}) \\ &\quad -(2\alpha+1)\sum_{i=1}^{n}\log x_i - \beta\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Dessa forma, as estimativas de máxima verossimilhança $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}$ para α, β são as soluções das equações não lineares:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}l(\alpha, \beta \mid \mathbf{x}) = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{\alpha}\log x_i}{1+x_i^{\alpha}} - 2\sum_{i=1}^{n}\log x_i + \beta\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}\log x_i = 0, \tag{2.28}$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}l(\alpha, \beta \mid \mathbf{x}) = \frac{n(2+\beta)}{\beta(1+\beta)} - \sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha} = 0. \tag{2.29}$$

Por outro lado, a equação (2.29) pode ser reescrita como:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}\right)\beta^2 + \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha} - n\right)\beta - 2n = 0,$$

e portanto, a estimativa de máxima verossimilhança $\widehat{\beta}$ é a única solução da equação acima, dado por:

$$\widehat{\beta}(\widehat{\alpha}) = \frac{-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\widehat{\alpha}} - n\right) + \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\widehat{\alpha}} - n\right)^2 + 8n\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\widehat{\alpha}}}}{2\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\widehat{\alpha}}}$$

e $\widehat{\alpha}$ será obtido pela solução da equação não linear:

$$G(\alpha) = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{\alpha}\log x_i}{1+x_i^{\alpha}} - 2\sum_{i=1}^{n}\log x_i + \widehat{\beta}(\alpha)\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}\log x_i = 0.$$

Para determinarmos os intervalos de confiança dos parâmetros utilizando as estimativas de máxima verossimilhança $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}$ utilizaremos a matriz de informação de Fisher, que para um vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$ e $n = 1$ é dada por:

$$I(\boldsymbol{\theta}) = I_{ij}(\boldsymbol{\theta}) = E\left[-\frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\log f(X \mid \boldsymbol{\theta})\right].$$

Assim, as derivadas de segunda ordem da função log-verossimilhança são:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}l(\alpha,\beta \mid \mathbf{x}) &= -\frac{n}{\alpha^2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{\alpha}\log^2 x_i}{(1+x_i^{\alpha})^2} - \beta\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}\log^2 x_i, \\
\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}l(\alpha,\beta \mid \mathbf{x}) &= -\frac{n(\beta^2+4\beta+2)}{\beta^2(1+\beta)^2}, \\
\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}l(\alpha,\beta \mid \mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}\log x_i.
\end{aligned}$$

Para obter a matriz de informação de Fisher é preciso determinar as esperanças das derivadas de segunda ordem obtidas acima tomando $n = 1$, sem perda de generalidade. Para isso é necessário o cálculos de algumas integrais. De acordo com Gradshteyn e Ryzhik (2007),

$$\int_0^{\infty} t^{\nu-1}\log(t)e^{-\beta t}dt = \frac{\Gamma(\nu)}{\beta^{\nu}}[\psi(\nu) - \log\beta], \quad \nu,\beta > 0.$$

De maneira análoga, temos:

$$\int_0^{\infty} t^{\nu-1}(\log(t))^2 e^{-\beta t}dt = \frac{\Gamma(\nu)}{\beta^{\nu}}\left\{[\psi(\nu) - \log\beta]^2 + \zeta(2,\nu)\right\}, \quad \nu,\beta > 0,$$

sendo $\Gamma(t)$ a função gama, $\psi(t) = \frac{d}{dt}\log\Gamma(t)$ a função digama, e $\zeta(z,\nu)$ a função zeta de Riemann definida por:

$$\zeta(z,\nu) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(\nu+m)^z}, \quad z > 1, \quad \nu \neq 0, -1, -2, \ldots$$

A partir dessas equações é possível calcular as esperanças necessárias para compor a matriz de Fisher. Dessa forma, seja *T* uma variável aleatória com distribuição Lindley, então a variável aleatória $X = T^{-\frac{1}{\alpha}}$ segue uma distribuição Lindley inversa potência, logo:

$$\begin{aligned}
E\left[\frac{X^{\alpha}(\log X)^2}{(1+X^{\alpha})^2}\right] &= E\left[\frac{T^{-1}}{(1+T^{-1})^2}\left(-\frac{\log T}{\alpha}\right)^2\right] \\
&= \frac{\beta^2}{\alpha^2(1+\beta)}\int_0^{\infty}\frac{t^{-1}(1+t)(\log t)^2 e^{-\beta t}}{(1+t^{-1})}dt \\
&= \frac{\beta^2}{\alpha^2(1+\beta)}\int_0^{\infty}\left(1-\frac{1}{1+t}\right)(\log t)^2 e^{-\beta t}dt \\
&= \frac{\beta}{\alpha^2(1+\beta)}\left\{[\psi(1) - \log\beta]^2 + \zeta(2,1) - \beta J(\beta)\right\},
\end{aligned}$$

no qual:

$$J(\beta) = \int_0^\infty \frac{(\log t)^2}{1+t} e^{-\beta t} dt.$$

$$\begin{aligned} E[X^{-\alpha}(\log X)^2] &= E\left[T\left(-\frac{\log T}{\alpha}\right)^2\right] \\ &= \frac{\beta^2}{\alpha^2(1+\beta)} \int_0^\infty t(\log t)^2(1+t)e^{-\beta t} dt \\ &= \frac{\beta\left\{[\psi(2)-\log\beta]^2+\zeta(2,2)\right\}+2\left\{[\psi(3)-\log\beta]^2+\zeta(2,3)\right\}}{\alpha^2\beta(1+\beta)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[X^{-\alpha}\log X] &= E\left[-\frac{T\log T}{\alpha}\right] \\ &= -\frac{\beta^2}{\alpha(1+\beta)} \int_0^\infty t\log t(1+t)e^{-\beta t} dt \\ &= -\frac{\beta[\psi(2)-\log\beta]+2[\psi(3)-\log\beta]}{\alpha\beta(1+\beta)}, \end{aligned}$$

assim,

$$\begin{aligned} I_{11} &= \frac{1}{\alpha^2} - E\left[\frac{X^\alpha(\log X)^2}{(1+X^\alpha)^2}\right] + \beta E\left[X^\alpha(\log X)^2\right] \\ &= \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2(1+\beta)}\Big\{\beta\left[(\psi(2)-\log\beta)^2+\zeta(2,2)\right]+2\left[(\psi(3)-\log\beta)^2+\zeta(2,3)\right] \\ &\quad -\beta\left[(\psi(1)-\log\beta)^2+\zeta(2,1)\right]+\beta^2 J(\beta)\Big\}, \end{aligned}$$

$$I_{22} = \frac{\beta^2+4\beta+2}{\beta^2(1+\beta)^2},$$

$$\begin{aligned} I_{12} &= E[X^{-\alpha}\log X] \\ &= -\frac{\beta[\psi(2)-\log\beta]+2[\psi(3)-\log\beta]}{\alpha\beta(1+\beta)}. \end{aligned}$$

Dessa forma, para resolver essas equações necessitamos conhecer os valores das funções digama, localmente em 1, 2 e 3, e zeta de Riemann, localmente em (2,1), (2,2) e (2,3), que são:

$$\psi(1) = -0.577216, \quad \psi(2) = 0.422784, \quad \psi(3) = 0.922784;$$

$$\zeta(2,1) = 1.644934, \quad \zeta(2,2) = 0.644934, \quad \zeta(2,3) = 0.394934.$$

Sob as condições de regularidade (MILLAR, 2011; PAWITAN, 2001), a distribuição assintótica do estimador de máxima verossimilhança $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ para $\boldsymbol{\theta}$ é dado por:

$$\sqrt{n}(\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \to N(0, I^{-1}(\boldsymbol{\theta}))$$

na qual $I^{-1}(\boldsymbol{\theta})$ é a inversa da matriz de informação de Fisher, em que:

$$\frac{1}{n}I^{-1}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} Var(\widehat{\alpha}) & Cov(\widehat{\alpha},\widehat{\beta}) \\ Cov(\widehat{\alpha},\widehat{\beta}) & Var(\widehat{\beta}) \end{pmatrix}. \tag{2.30}$$

Então, os intervalos de confiança assintóticos de $100(1-\delta)\%$ para α e β, respectivamente, são dados por:

$$\widehat{\alpha} \pm z_{\frac{\delta}{2}}\sqrt{\widehat{Var(\widehat{\alpha})}}, \quad \text{e} \quad \widehat{\beta} \pm z_{\frac{\delta}{2}}\sqrt{\widehat{Var(\widehat{\beta})}}$$

em que $\widehat{Var(\widehat{\alpha})}$ e $\widehat{Var(\widehat{\beta})}$ são os elementos da diagonal principal da matriz definida em (2.30).

Na prática, nem sempre é possível calcular as integrais envolvidas na composição da matriz de informação de Fisher. Neste caso, usa-se o inverso da matriz hessiana localmente nas estimativas de máxima verossimilhança.

2.7 Estudo de Simulação

Esta Seção apresenta um estudo de simulação com o propósito de verificar o comportamento dos estimadores de máxima verossimilhança da distribuição Lindley inversa potência. Para isso se faz necessária a simulação de valores para a variável aleatória X com função densidade (2.11).

Pelo método da inversão da função de distribuição acumulada temos:

$$X_i = \left[-1 - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta}W_{-1}\left(-u_i(1+\beta)e^{-(1+\beta)}\right)\right]^{-\frac{1}{\alpha}}, i = 1, \ldots, n, \tag{2.31}$$

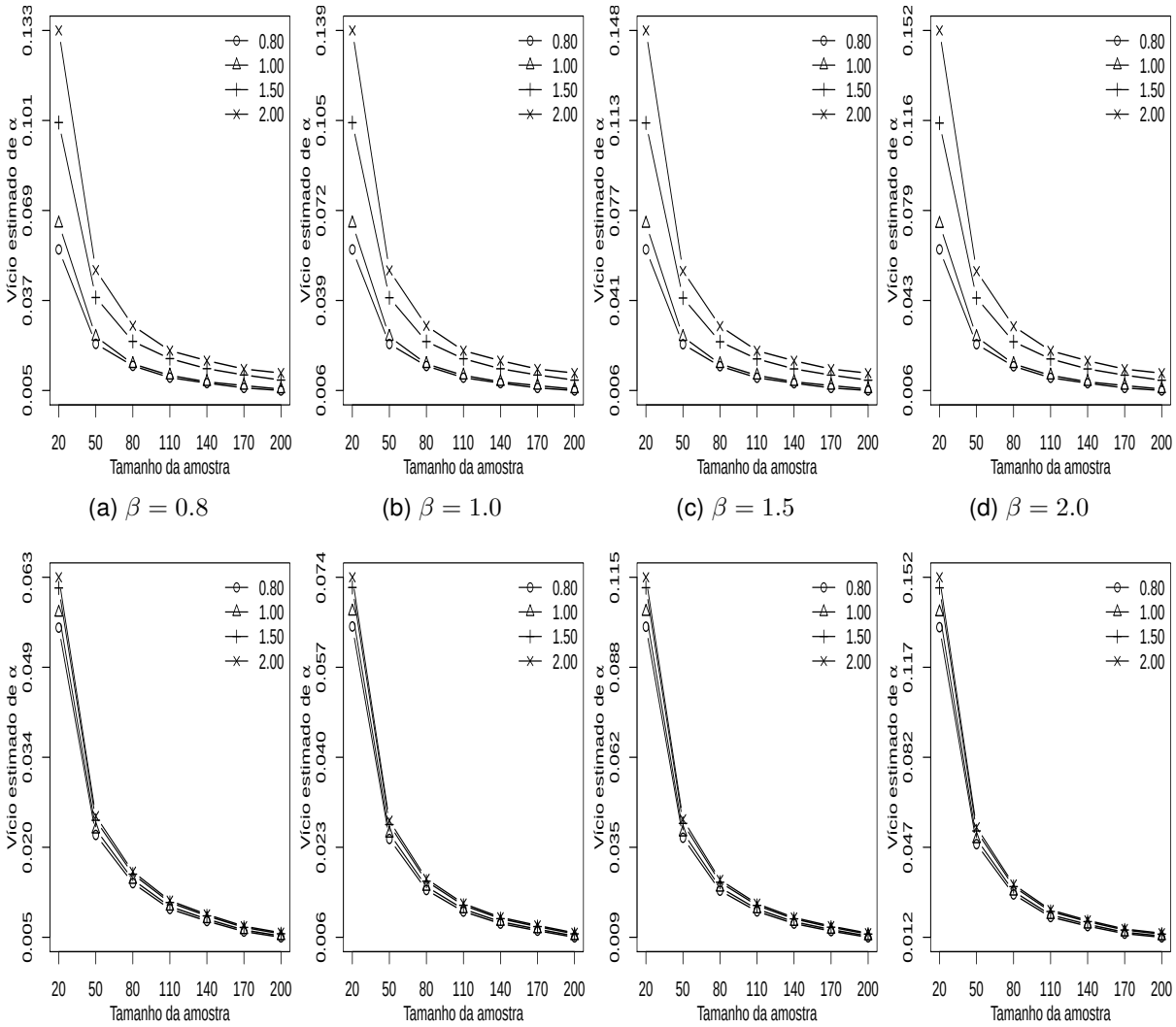
em que u_i são valores de uma variável aleatória uniforme no intervalo $(0, 1)$.

A partir da equação (2.31) foram geradas $N = 10000$ amostras pseudo-aleatórias da distribuição Lindley inversa potência com tamanhos $n = 20, 50, 80, 110, 140, 170, 200$ e parâmetros $(\alpha, \beta) = (0.8, 0.8), (0.8, 1.0), (0.8, 1.5), (0.8, 2.0), (1.0, 0.8), (1.0, 1.0), (1.0, 1.5), (1.0, 2.0), (1.5, 0.8), (1.5, 1.0), (1.5, 1.5), (1.5, 2.0), (2.0, 0.8), (2.0, 1.0), (2.0, 1.5)$ e $(2.0, 2.0)$.

Além disso, as estimativas dos parâmetros foram obtidas pelo método da máxima verossimilhança, e também foram calculados os vícios e erros quadráticos médios de $\widehat{\alpha}$ e $\widehat{\beta}$, dados por:

$$\text{Vício}(\widehat{\theta}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\widehat{\theta}_i - \theta), \quad \text{e} \quad \text{EQM}(\widehat{\theta}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\widehat{\theta}_i - \theta)^2, \quad \text{em que} \quad \theta = \alpha, \beta.$$

Nas Figuras de 8 à 11 são apresentados, respectivamente, os vícios de $\widehat{\alpha}$ e $\widehat{\beta}$, e os erros quadráticos médios de $\widehat{\alpha}$ e $\widehat{\beta}$. De forma geral, a medida em que aumentamos o tamanho da amostra, tanto o vício quanto o erro quadrático médio tendem a zero.

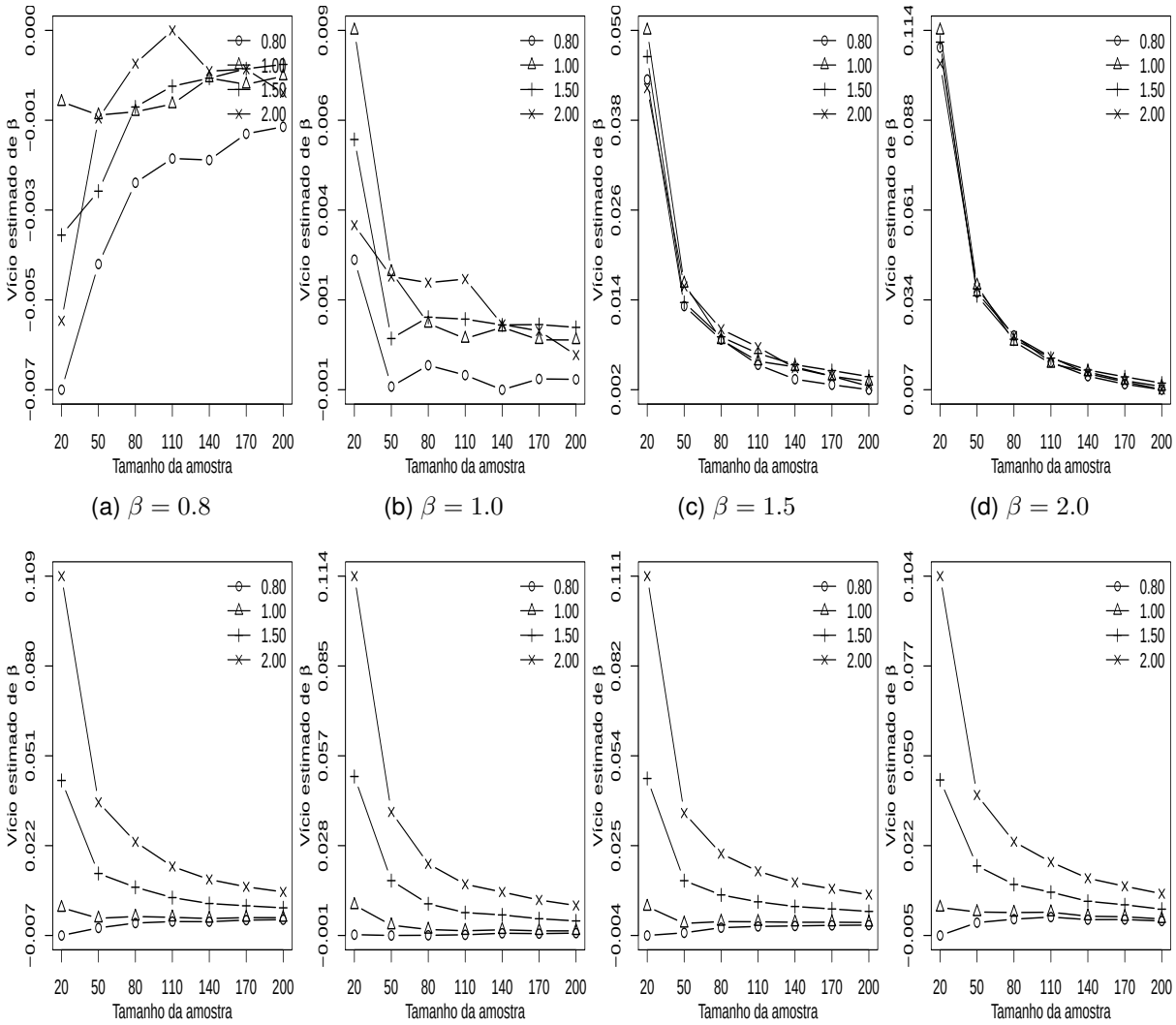


(a) $\beta = 0.8$ (b) $\beta = 1.0$ (c) $\beta = 1.5$ (d) $\beta = 2.0$

(e) $\alpha = 0.8$ (f) $\alpha = 1.0$ (g) $\alpha = 1.5$ (h) $\alpha = 2.0$

Figura 8 – Vícios de $\widehat{\alpha}$.

Na Figura 8 é possível verificar que os vícios de $\widehat{\alpha}$ são estritamente positivos. Além disso, a medida que α e β crescem, o vício de $\widehat{\alpha}$ aumenta. Entretanto, os efeitos de β nos vícios de $\widehat{\alpha}$ são bem discretos.

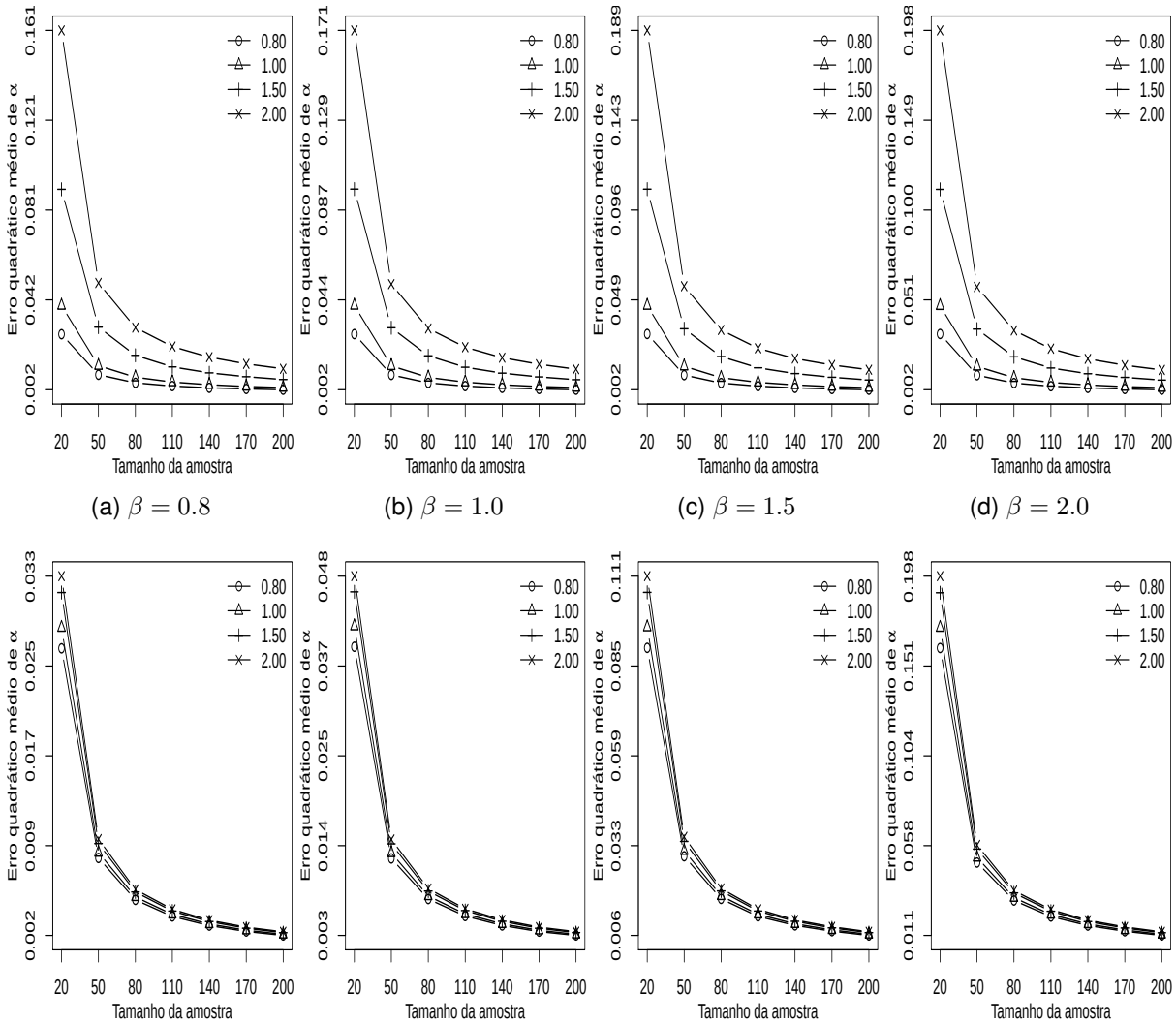


(a) $\beta = 0.8$ (b) $\beta = 1.0$ (c) $\beta = 1.5$ (d) $\beta = 2.0$

(e) $\alpha = 0.8$ (f) $\alpha = 1.0$ (g) $\alpha = 1.5$ (h) $\alpha = 2.0$

Figura 9 – Vícios de $\widehat{\beta}$.

Na Figura 9 é possível verificar que os vícios de $\widehat{\beta}$ podem ser positivos ou negativos. Devido a instabilidade numérica para pequenos valores de β pode-se verificar que os valores do vício aumentam a medida em que aumentamos o tamanho da amostra, tendendo a zero por serem valores negativos, além de não apresentar um comportamento regular. Além disso, a medida em que os valores de β são aumentados, o vício de $\widehat{\beta}$ aumenta.

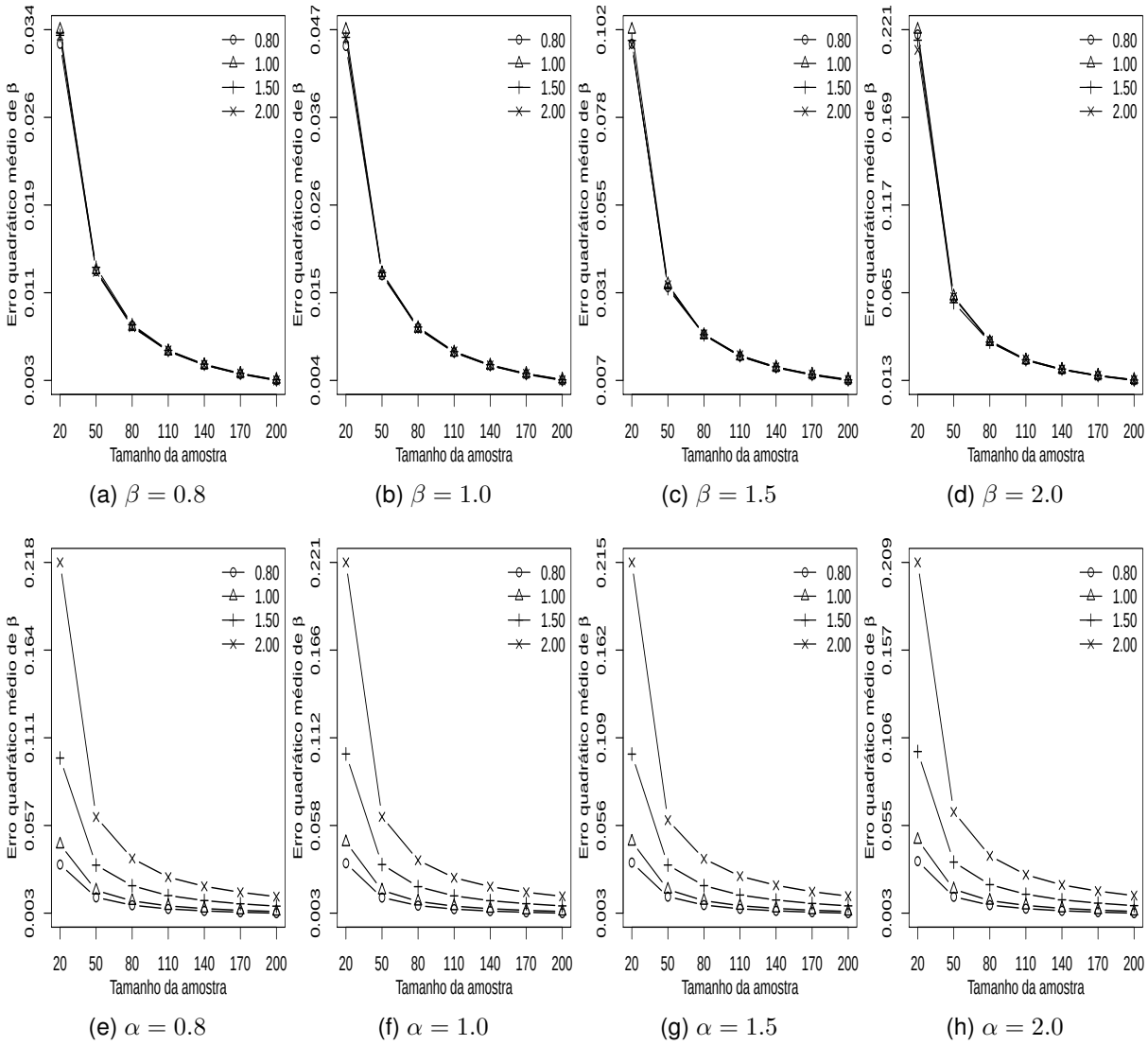


(a) $\beta = 0.8$ (b) $\beta = 1.0$ (c) $\beta = 1.5$ (d) $\beta = 2.0$

(e) $\alpha = 0.8$ (f) $\alpha = 1.0$ (g) $\alpha = 1.5$ (h) $\alpha = 2.0$

Figura 10 – Erros quadráticos médios de $\widehat{\alpha}$.

Na Figura 10 é possível verificar que a medida que são aumentados os valores de α ou β, o erro quadrático médio de $\widehat{\alpha}$ aumenta. Entretanto, os efeitos de β nos erros quadráticos médios de $\widehat{\alpha}$ são bem sutis.



(a) $\beta = 0.8$ (b) $\beta = 1.0$ (c) $\beta = 1.5$ (d) $\beta = 2.0$

(e) $\alpha = 0.8$ (f) $\alpha = 1.0$ (g) $\alpha = 1.5$ (h) $\alpha = 2.0$

Figura 11 – Erros quadráticos médios de $\widehat{\beta}$

Na Figura 11 é possível verificar que a medida que os valores de β são aumentados, o erro quadrático médio de $\widehat{\beta}$ aumenta. Além disso, os efeitos de α nos erros quadráticos médios de $\widehat{\beta}$ são bem sutis.

2.8 Aplicação em Dados Reais

Nesta Seção aplicamos a distribuição Lindley inversa potência a três conjuntos de dados. Nosso objetivo é avaliar o seu ajuste em relação a outras distribuições já apresentadas na literatura.

A estimação dos parâmetros foi realizada pelo método da máxima verossimilhança. Para realizar a comparação dos modelos consideramos os valores de $-\log L$, o critério de informação de Akaike (AIC) e o critério de informação Bayesiana (BIC), definidos respectivamente por $-2\log L + 2q$ e $-2\log L + q\log(n)$, em que q é o número de parâmetros

estimados e n é o tamanho da amostra. O modelo mais adequado corresponde àquele que obtiver os menores valores para $-\log L$, AIC e BIC.

Além disso, também são apresentadas as estatísticas dos testes de aderência de Kolmogorov-Smirnov (KS), Anderson-Darling (AD) e Cramer-von Mises (CVM), e os seus respectivos p-valores. Esses testes observam as diferenças entre a função de distribuição acumulada assumida e a função de distribuição acumulada empírica dos dados, a fim de verificar quais distribuições se ajustaram aos dados (p-valor> 0.05).

O primeiro conjunto de dados a ser estudado foi utilizado por Nadarajah, Bakouch e Tahmasbi (2011) em seu trabalho sobre a distribuição Lindley generalizada de dois parâmetros. Os dados são referentes a um estudo sobre os tempos de alívio da dor de 20 pacientes que receberam um analgésico.

Tabela 2 – Conjunto de dados 1.

1.1	1.4	1.3	1.7	1.9	1.8	1.6	2.2	1.7	2.7
4.1	1.8	1.5	1.2	1.4	3.0	1.7	2.3	1.6	2.0

Assim, comparamos a distribuição Lindley inversa potência (LIP) com as distribuições Lindley generalizada (LG), Lindley potência (LP), Lindley inversa (LI) e Lindley (L). Os valores de $-\log L$, AIC e BIC apresentados na Tabela 3 indicam que a distribuição Lindley inversa potência (LIP) apresentou um melhor ajuste aos dados do que as demais distribuições testadas. Além disso, a distribuição Lindley inversa potência nos forneceu valores baixos para o erro padrão dos parâmetros, o que nos sugere uma boa estimativa, ao contrário do que acontece com a distribuição Lindley generalizada.

Com relação aos testes de aderência apresentados na Tabela 4 verificamos que as distribuições Lindley potência, Lindley generalizada e Lindley inversa potência se ajustam aos dados (p-valor> 0.05), sendo que essa última obteve os menores valores das estatísticas de teste com os maiores p-valores nos três testes realizados.

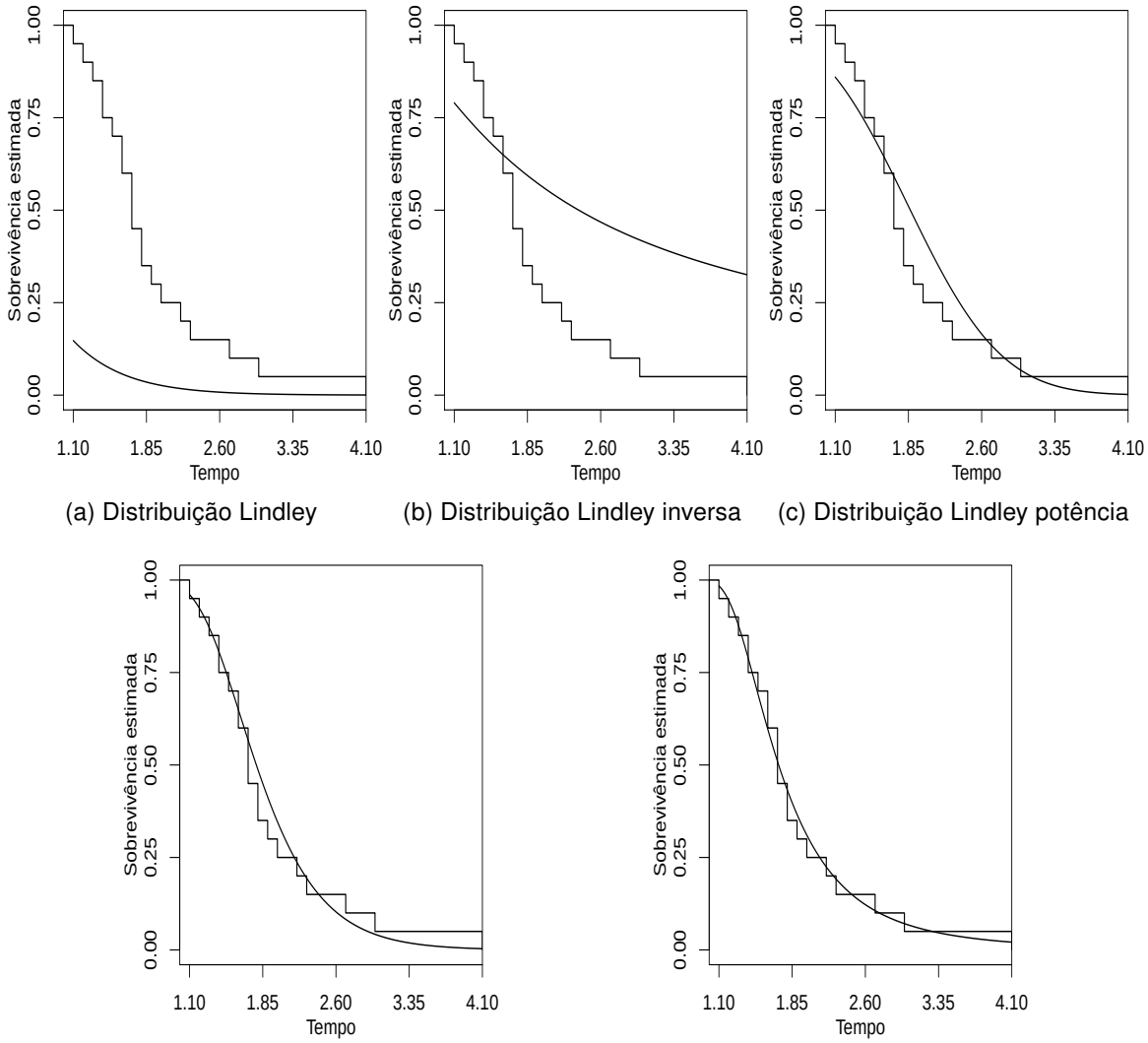
Tabela 3 – Resumo das distribuições ajustadas — dados 1.

Modelo	Estimativas	E.P.	$-\log L$	AIC	BIC
L	$\widehat{\beta} = 0.8161$	0.1361	30.2496	62.4991	63.4948
LI	$\widehat{\beta} = 2.2547$	0.4089	31.7572	65.5144	66.5101
LP	$\widehat{\alpha} = 2.2529$	0.3068	20.4320	44.8640	46.8554
	$\widehat{\beta} = 0.3445$	0.0997			
LG	$\widehat{\lambda} = 2.5395$	0.4492	16.4045	36.8089	38.8004
	$\widehat{\alpha} = 27.8765$	19.1608			
LIP	$\widehat{\alpha} = 3.9812$	0.7041	15.4132	34.8263	36.8178
	$\widehat{\beta} = 6.7190$	1.9947			

Tabela 4 – Resultados dos testes de aderência — dados 1.

Modelo	KS	p-valor	AD	p-valor	CVM	p-valor
L	0.3911	0.0044	3.7504	0.0118	0.7550	0.0086
LI	0.3695	0.0085	4.4689	0.0053	0.9054	0.0036
LP	0.1877	0.4815	1.0369	0.3375	0.1754	0.3225
LG	0.1377	0.8426	0.3344	0.9093	0.0509	0.8764
LIP	0.1031	0.9836	0.1560	0.9982	0.0269	0.9873

Na Figura 12 são apresentadas as curvas empíricas e teóricas das funções de sobrevivência das distribuições testadas. Pelos gráficos também é possível observar que a distribuição Lindley inversa potência foi a que melhor se ajustou ao conjunto de dados, obtendo um maior aproximação entre as curvas teórica e empírica.



(a) Distribuição Lindley (b) Distribuição Lindley inversa (c) Distribuição Lindley potência

(d) Distribuição Lindley generalizada (e) Distribuição Lindley inversa potência

Figura 12 – Distribuições ajustadas — dados 1.

O segundo conjunto de dados a ser estudado foi utilizado por Mahmoud e Mandouh (2013) em seu trabalho sobre a distribuição Fréchet transmutada de três parâmetros. Os dados são referentes a tempos de simulação da força de fibras de vidro.

Tabela 5 – Conjunto de dados 2.

1.014	1.081	1.082	1.185	1.223	1.248	1.267	1.271	1.272
1.275	1.276	1.278	1.286	1.288	1.292	1.304	1.306	1.355
1.361	1.364	1.379	1.409	1.426	1.459	1.460	1.476	1.481
1.484	1.501	1.506	1.524	1.526	1.535	1.541	1.568	1.579
1.581	1.591	1.593	1.602	1.666	1.670	1.684	1.691	1.704
1.731	1.735	1.747	1.748	1.757	1.800	1.806	1.867	1.876
1.878	1.910	1.916	1.972	2.012	2.456	2.592	3.197	4.121

Analogamente, comparamos a distribuição Lindley inversa potência (LIP) com as distribuições Fréchet transmutada (FT), Lindley potência (LP), Lindley inversa (LI) e Lindley (L). Os valores de $-\log L$, AIC e BIC são apresentados na Tabela 6.

Os resultados dos testes de aderência apresentados na Tabela 7 indicam que apenas as distribuições Fréchet transmutada e Lindley inversa potência se ajustam aos dados (p-valor> 0.05).

Conforme pode ser observados nos resultados apresentados para os conjuntos de dados 2, a distribuição Lindley inversa potência obteve os menores valores para os critério AIC e BIC o que não aconteceu com $-\log L$, entretanto essa diferença foi bem sútil, assim como nos testes de aderência. Além disso, a distribuição Lindley inversa potência nos forneceu valores baixos para o erro padrão dos parâmetros, o que nos sugere uma boa estimativa.

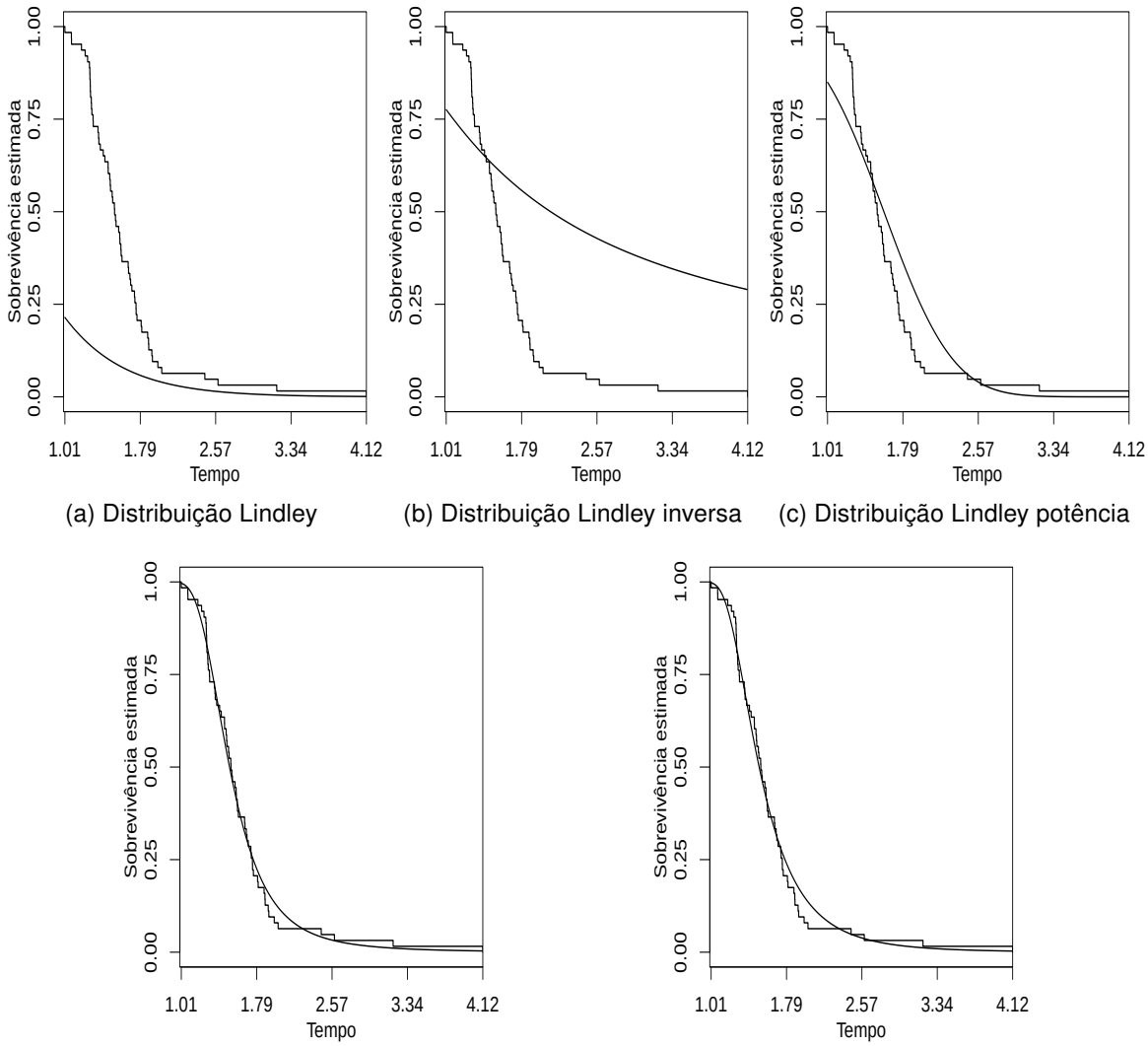
Tabela 6 – Resumo das distribuições ajustadas — dados 2.

Modelo	Estimativas	E.P.	$-\log L$	AIC	BIC
L	$\widehat{\beta} = 0.9383$	0.0890	85.4760	172.9519	175.0950
LI	$\widehat{\beta} = 2.0297$	0.2053	89.3345	180.6689	182.8121
LP	$\widehat{\alpha} = 2.5761$	0.1852	45.1260	94.2521	98.5384
	$\widehat{\beta} = 0.4123$	0.0605			
FT	$\widehat{\mu} = 4.3142$	0.5850	19.3693	44.7386	51.1680
	$\widehat{\sigma} = 1.5491$	0.0655			
	$\widehat{\lambda} = 0.7778$	0.2477			
LIP	$\widehat{\alpha} = 5.3904$	0.5243	20.1115	44.2229	48.5092
	$\widehat{\beta} = 7.1998$	1.2265			

Tabela 7 – Resultados dos testes de aderência — dados 2.

Modelo	KS	p-valor	AD	p-valor	CVM	p-valor
L	0.4347	2.407e-11	15.6600	9.524e-06	3.2654	6.953e-09
LI	0.4504	3.472e-12	17.3590	9.524e-06	3.6203	6.812e-10
LP	0.1909	0.0175	4.8702	0.0033	0.8078	0.0068
FT	0.0635	0.9472	0.4077	0.8405	0.0530	0.8598
LIP	0.0780	0.8091	0.5389	0.7069	0.0714	0.7445

Na Figura 13 são apresentadas as curvas empíricas e teóricas das funções de sobrevivência das distribuições testadas.



(a) Distribuição Lindley (b) Distribuição Lindley inversa (c) Distribuição Lindley potência

(d) Distribuição Fréchet Transmutada (e) Distribuição Lindley inversa potência

Figura 13 – Distribuições ajustadas — dados 2.

Também pela visualização dos gráficos é possível observar que a distribuição Fréchet transmutada forneceu um bom ajuste aos dados, com pouquíssima diferença em re-

lação a distribuição Lindley inversa potência.

A partir disso, verificamos que a distribuição Lindley inversa potência é uma forte concorrente para a distribuições Fréchet transmutada, devido ao fato de possuir apenas dois parâmetros para serem estimados.

O terceiro conjunto de dados trata-se de uma série com 19710 valores do escoamento diário (em m^3/s) do rio Tibre observados pela estação Ripetta, localizada em Roma, durante o período de 1930 a 1983. Nesta série foram desconsiderados os valores dos dias 29 de fevereiro, para se obter um conjunto de dados periódico. Esses dados estão disponíveis no site do *"Gruppo nazionale per la difesa delle catastrofi idrogeologiche"* (www.gndci.cnr.it). Além disso, essa série também está disponível na biblioteca "LPM"do *software* R 3.2.0.

Analogamente, comparamos a distribuição Lindley inversa potência (LIP) com as distribuições Weibull (W), bastante utilizada na modelagem de dados de sobrevivência, Lindley potência (LP), Lindley inversa (LI) e Lindley (L). Os valores de $-\log L$, AIC e BIC apresentados na Tabela 8 indicam que a distribuição Lindley inversa potência (LIP) apresentou um melhor ajuste aos dados do que as demais distribuições testadas.

O mesmo se confirma nos testes de aderência apresentados na Tabela 9. Verificamos que a distribuição Lindley inversa potência foi a que forneceu os menores valores para as estatísticas dos testes.

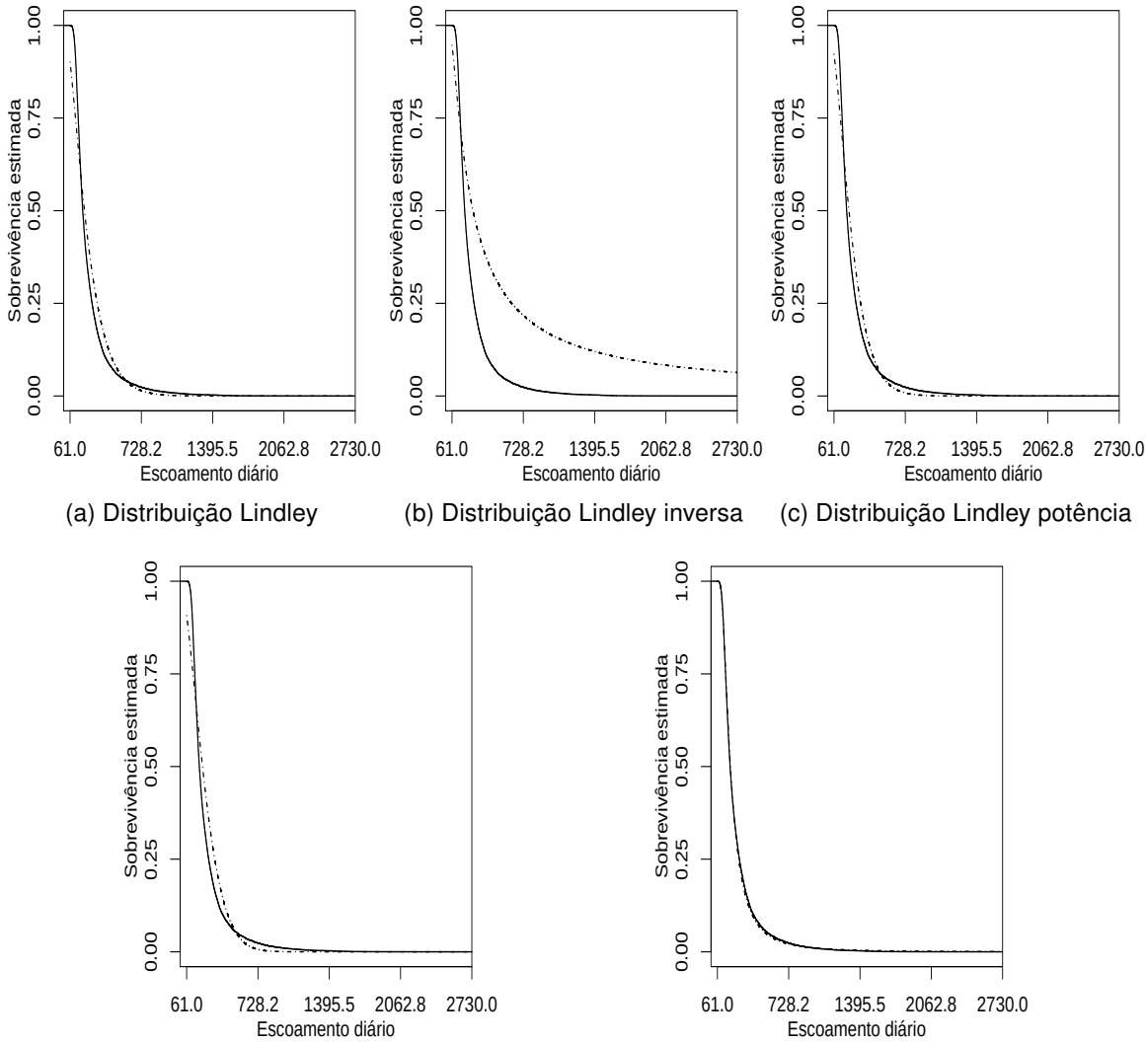
Tabela 8 – Resumo das distribuições ajustadas — dados 3.

Modelo	Estimativas	E.P.	$-\log L$	AIC	BIC
L	$\widehat{\beta} = 0.0085$	4.233e-05	122785.9	245573.9	245581.8
LI	$\widehat{\beta} = 179.5127$	1.2716	126344.3	252690.7	252698.6
LP	$\widehat{\alpha} = 1.0941$	0.0028	122339.4	244682.7	244698.5
	$\widehat{\beta} = 0.0050$	7.786e-05			
W	$\widehat{\alpha} = 1.5901$	0.0074	123692.7	247389.4	247405.1
	$\widehat{\beta} = 263.8528$	1.2583			
LIP	$\widehat{\alpha} = 2.5131$	0.0015	117479.4	234962.8	234978.6
	$\widehat{\beta} = 337267.1$	537.0948			

Tabela 9 – Resultados dos testes de aderência — dados 3.

Modelo	KS	AD	CVM
L	0.1796	965.9143	152.0604
LI	0.2645	2788.5700	538.9822
LP	0.1517	784.6960	120.7719
W	0.1589	∞	159.8157
LIP	0.0221	13.7610	2.4056

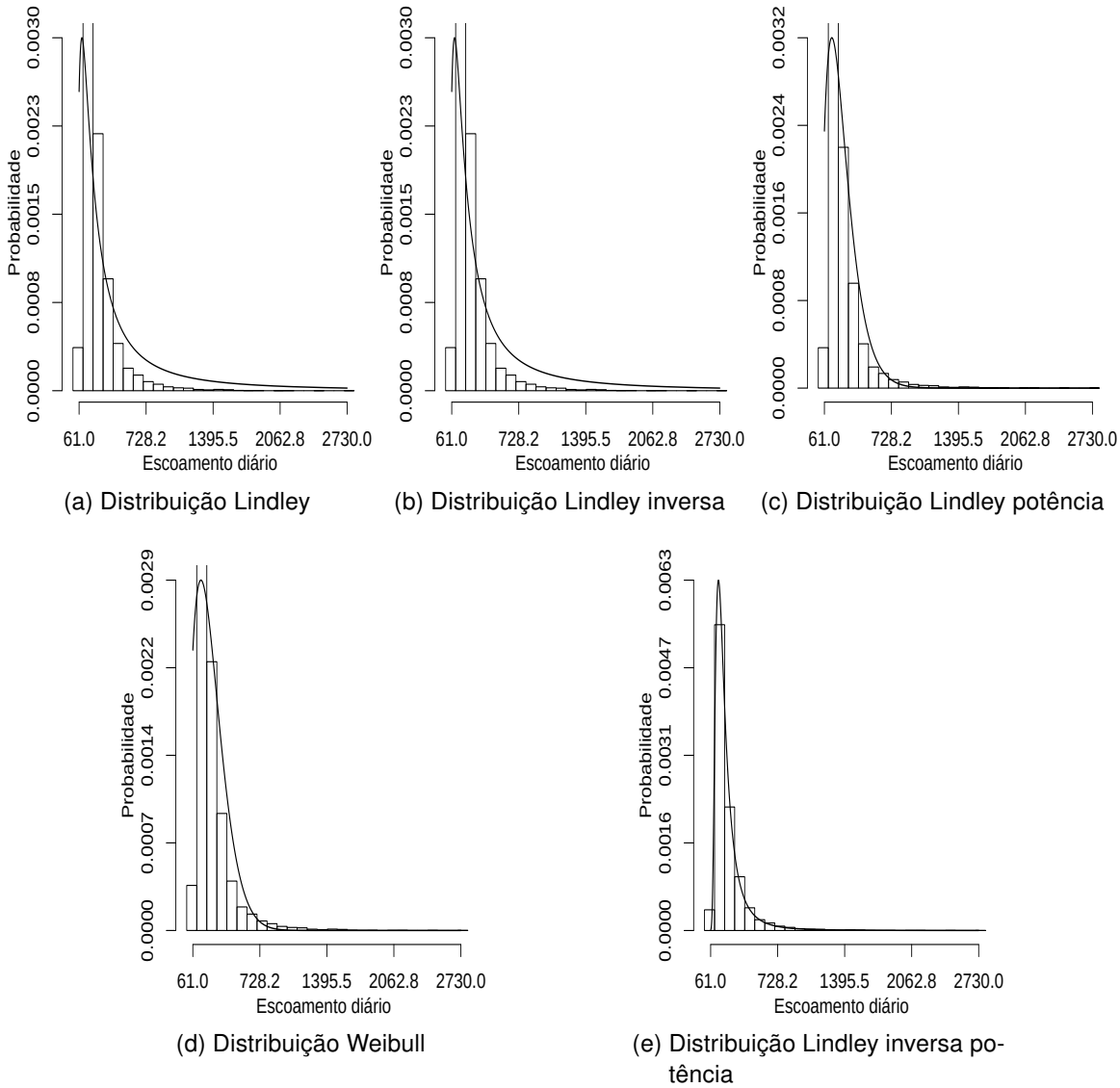
Na Figura 14 são apresentadas as curvas empíricas e teóricas das funções de sobrevivência das distribuições testadas. Na Figura 15 apresentamos os histogramas com a curva da função densidade estimada.



(a) Distribuição Lindley (b) Distribuição Lindley inversa (c) Distribuição Lindley potência

(d) Distribuição Weibull (e) Distribuição Lindley inversa potência

Figura 14 – Distribuições ajustadas — dados 3.



(a) Distribuição Lindley (b) Distribuição Lindley inversa (c) Distribuição Lindley potência

(d) Distribuição Weibull (e) Distribuição Lindley inversa potência

Figura 15 – Histogramas — dados 3.

Também podemos realizar o ajuste da distribuição Lindley inversa potência aos dados de escoamento do rio Tibre quando separados mês a mês, partindo do princípio de que esses valores sofrem influência de fatores climáticos, principalmente no que diz respeito ao volume de chuva.

Dessa forma, novamente comparamos a distribuição Lindley inversa potência (LIP) com as distribuições Weibull (W), Lindley potência (LP), Lindley inversa (LI) e Lindley (L). Os valores de $-\log L$, AIC e BIC para cada mês são apresentados nas Tabelas 10 e 11 indicam que a distribuição Lindley inversa potência (LIP) apresentou um melhor ajuste aos dados do que as demais distribuições testadas.

Tabela 10 – Resumo das distribuições ajustadas — dados 3 — Janeiro à Junho

Mês	Modelo	Estimativas	E.P.	$-\log L$	AIC	BIC
Janeiro	L	$\widehat{\beta} = 0.0065$	0.0001	10859.93	21721.86	21727.28
	LI	$\widehat{\beta} = 245.0028$	5.9639	11240.48	22482.96	22488.38
	LP	$\widehat{\alpha} = 1.1007$	0.0071	10796.94	21597.87	21608.72
	W	$\widehat{\beta} = 0.0036$	0.0001			
		$\widehat{\alpha} = 1.8138$	0.0302	10845.33	21694.66	21705.51
	LIP	$\widehat{\beta} = 352.1656$	5.0480			
		$\widehat{\alpha} = 2.4096$	0.0047	10516.16	21036.33	21047.17
		$\widehat{\beta} = 422411.9$	1498.278			
Fevereiro	L	$\widehat{\beta} = 0.0056$	9.855e-05	10065.28	20132.56	20137.88
	LI	$\widehat{\beta} = 264.9349$	6.7880	10341.62	20685.24	20690.56
	LP	$\widehat{\alpha} = 1.0401$	0.0082	10049.10	20102.20	20112.84
	W	$\widehat{\beta} = 0.0044$	0.0002			
		$\widehat{\alpha} = 1.6095$	0.0281	10122.55	20249.09	20259.74
	LIP	$\widehat{\beta} = 401.7067$	6.8330			
		$\widehat{\alpha} = 2.1256$	0.0057	9821.92	19647.84	19658.49
		$\widehat{\beta} = 108004.9$	1748.787			
Março	L	$\widehat{\beta} = 0.0063$	0.0001	10872.28	21746.57	21751.99
	LI	$\widehat{\beta} = 255.0124$	6.2086	11274.32	22550.63	22556.05
	LP	$\widehat{\alpha} = 1.1054$	0.0069	10798.91	21601.81	21612.66
	W	$\widehat{\beta} = 0.0035$	0.0001			
		$\widehat{\alpha} = 1.8766$	0.0310	10831.01	21666.02	21676.87
	LIP	$\widehat{\beta} = 359.0672$	4.9746			
		$\widehat{\alpha} = 2.5751$	0.0046	10466.19	20936.37	20947.22
		$\widehat{\beta} = 1149993$	1484.959			
Abril	L	$\widehat{\beta} = 0.0078$	0.0001	10117.76	20237.53	20242.92
	LI	$\widehat{\beta} = 218.0080$	5.3920	10579.25	21160.50	21165.89
	LP	$\widehat{\alpha} = 1.1720$	0.0064	9969.11	19942.22	19953.00
	W	$\widehat{\beta} = 0.0031$	0.0001			
		$\widehat{\alpha} = 2.1975$	0.0364	9927.51	19859.01	19869.79
	LIP	$\widehat{\beta} = 288.5170$	3.4673			
		$\widehat{\alpha} = 2.8477$	0.0048	9641.22	19286.45	19297.23
		$\widehat{\beta} = 3249995$	1483.158			
Maio	L	$\widehat{\beta} = 0.0088$	0.0001	10272.15	20546.29	20551.72
	LI	$\widehat{\beta} = 194.7213$	4.7351	10732.32	21466.64	21472.06
	LP	$\widehat{\alpha} = 1.1867$	0.0067	10116.00	20236.01	20246.85
	W	$\widehat{\beta} = 0.0032$	0.0001			
		$\widehat{\alpha} = 2.0801$	0.0331	10128.61	20261.22	20272.06
	LIP	$\widehat{\beta} = 257.8739$	3.2231			
		$\widehat{\alpha} = 3.1000$	0.0049	9677.93	19359.87	19370.71
		$\widehat{\beta} = 8679631$	1482.946			
Junho	L	$\widehat{\beta} = 0.0113$	0.0002	9470.15	18942.31	18947.70
	LI	$\widehat{\beta} = 159.2344$	3.9318	9982.89	19967.78	19973.17
	LP	$\widehat{\alpha} = 1.2777$	0.0059	9192.96	18389.92	18400.70
	W	$\widehat{\beta} = 0.0027$	7.146e-05			
		$\widehat{\alpha} = 2.4845$	0.0382	9111.96	18227.92	18238.70
	LIP	$\widehat{\beta} = 196.9505$	2.0918			
		$\widehat{\alpha} = 3.5284$	0.0051	8729.01	17462.02	17472.80
		$\widehat{\beta} = 40000038$	1482.912			

Tabela 11 – Resumo das distribuições ajustadas — dados 3 — Julho à Dezembro

Mês	Modelo	Estimativas	E.P.	$-\log L$	AIC	BIC
Julho	L	$\widehat{\beta} = 0.0141$	0.0002	9370.02	18742.04	18747.46
	LI	$\widehat{\beta} = 133.3214$	3.2346	9952.31	19906.62	19912.04
	LP	$\widehat{\alpha} = 1.3603$	0.0054	8936.13	17876.26	17887.11
		$\widehat{\beta} = 0.0024$	5.127e-05			
	W	$\widehat{\alpha} = 3.8704$	0.0652	8447.81	16899.62	16910.47
		$\widehat{\beta} = 154.5419$	1.0358			
	LIP	$\widehat{\alpha} = 4.2756$	0.0052	8332.08	16668.16	16679.00
		$\widehat{\beta} = 800000000$	1482.910			
Agosto	L	$\widehat{\beta} = 0.0155$	0.0003	9210.78	18423.56	18428.98
	LI	$\widehat{\beta} = 123.0051$	2.9825	9801.83	19605.66	19611.09
	LP	$\widehat{\alpha} = 1.3934$	0.0054	8730.48	17464.96	17475.81
		$\widehat{\beta} = 0.0024$	4.945e-05			
	W	$\widehat{\alpha} = 4.2195$	0.0690	8146.56	16297.12	16307.97
		$\widehat{\beta} = 140.1715$	0.8604			
	LIP	$\widehat{\alpha} = 4.4787$	0.0053	8091.90	16187.79	16198.64
		$\widehat{\beta} = 1500000000$	2097.152			
Setembro	L	$\widehat{\beta} = 0.0133$	0.0002	9226.15	18454.30	18459.69
	LI	$\widehat{\beta} = 135.8887$	3.3519	9696.12	19394.24	19399.63
	LP	$\widehat{\alpha} = 1.2733$	0.0077	9002.43	18008.86	18019.64
		$\widehat{\beta} = 0.0034$	0.0001			
	W	$\widehat{\alpha} = 1.8469$	0.0248	9177.23	18358.47	18369.25
		$\widehat{\beta} = 168.2468$	2.4054			
	LIP	$\widehat{\alpha} = 4.3028$	0.0053	8182.58	16369.16	16379.94
		$\widehat{\beta} = 988790000$	2097.152			
Outubro	L	$\widehat{\beta} = 0.0111$	0.0002	9878.39	19758.77	19764.20
	LI	$\widehat{\beta} = 155.4229$	3.775	10313.27	20628.54	20633.96
	LP	$\widehat{\alpha} = 1.2193$	0.0076	9717.69	19439.38	19450.23
		$\widehat{\beta} = 0.0035$	0.0001			
	W	$\widehat{\alpha} = 1.8508$	0.0274	9843.37	19690.75	19701.59
		$\widehat{\beta} = 203.1394$	2.8563			
	LIP	$\widehat{\alpha} = 3.6601$	0.0050	9032.74	18069.49	18080.33
		$\widehat{\beta} = 70713587$	1482.911			
Novembro	L	$\widehat{\beta} = 0.0077$	0.0001	10276.46	20554.93	20560.32
	LI	$\widehat{\beta} = 195.7981$	4.8402	10535.97	21073.95	21079.34
	LP	$\widehat{\alpha} = 0.0052$	0.0003	10252.84	20509.68	20520.46
		$\widehat{\beta} = 1.0695$	0.0099			
	W	$\widehat{\alpha} = 1.5614$	0.0260	10358.33	20720.66	20731.44
		$\widehat{\beta} = 292.1710$	4.9541			
	LIP	$\widehat{\alpha} = 2.6357$	4.9533	9777.24	19558.48	19569.26
		$\widehat{\beta} = 793520.3$	1487.088			
Dezembro	L	$\widehat{\beta} = 0.0063$	0.0001	10990.74	21983.48	21988.91
	LI	$\widehat{\beta} = 227.8714$	5.5453	11217.36	22436.72	22442.14
	LP	$\widehat{\alpha} = 0.0052$	0.0003	10982.86	21969.71	21980.56
		$\widehat{\beta} = 1.0327$	0.0093			
	W	$\widehat{\alpha} = 1.4804$	0.0242	11091.15	22186.30	22197.15
		$\widehat{\beta} = 354.2354$	6.2256			
	LIP	$\widehat{\alpha} = 2.2712$	0.0051	10600.94	21205.88	21216.73
		$\widehat{\beta} = 170011.3$	1586.127			

Da mesma forma, apresentamos nas Tabelas 12 e 13 as estatísticas dos testes de aderência para o conjunto de dados 3, separados mês a mês.

Tabela 12 – Resultados dos testes de aderência — dados 3 — Janeiro à Agosto

Mês	Modelo	KS	AD	CVM
Janeiro	L	0.1836	78.7359	12.1266
	LI	0.2817	235.1516	45.3161
	LP	0.1561	57.2262	8.1576
	W	0.1247	53.5910	8.1074
	LIP	0.0288	1.9136	0.2819
Fevereiro	L	0.1285	61.6202	10.1154
	LI	0.2582	187.9700	36.6342
	LP	0.1202	55.7420	9.1390
	W	0.1471	64.0137	10.9804
	LIP	0.0646	8.9622	1.5630
Março	L	0.1914	94.6610	15.4755
	LI	0.2787	256.1395	49.8900
	LP	0.1667	72.0590	11.2090
	W	0.1187	60.7847	9.9366
	LIP	0.0223	1.1971	0.1067
Abril	L	0.2375	133.4736	23.2334
	LI	0.3266	294.7087	58.8092
	LP	0.2012	92.3510	15.3299
	W	0.1182	49.4851	7.6514
	LIP	0.0299	4.4461	0.5093
Maio	L	0.2443	139.8609	24.1245
	LI	0.3257	311.9815	62.0787
	LP	0.2014	93.8995	15.0587
	W	0.1450	66.6493	10.3217
	LIP	0.0409	1.7062	0.3112
Junho	L	0.2821	203.0074	37.4944
	LI	0.3732	364.6167	74.7189
	LP	0.2216	128.5830	22.2395
	W	0.1347	∞	9.2006
	LIP	0.0513	6.0045	0.9722
Julho	L	0.3326	292.2877	56.5388
	LI	0.4279	446.5038	93.4039
	LP	0.2690	200.3926	37.3075
	W	0.0797	26.4819	3.6780
	LIP	0.0595	12.7212	1.8448
Agosto	L	0.3480	320.2778	62.7184
	LI	0.4437	469.3798	98.7928
	LP	0.2973	234.7122	45.2484
	W	0.0813	∞	3.5734
	LIP	0.0635	16.5536	2.1864

Tabela 13 – Resultados dos testes de aderência — dados 3 — Setembro à Dezembro

Setembro	L	0.3249	252.2086	48.3110
	LI	0.4009	417.7961	87.1349
	LP	0.2696	180.3744	32.6106
	W	0.2558	∞	33.3355
	LIP	0.0357	4.0004	0.5329
Outubro	L	0.2863	189.6342	35.1470
	LI	0.3473	366.5977	74.7448
	LP	0.2355	135.7797	23.7199
	W	0.2136	140.4972	24.8814
	LIP	0.0477	5.1859	0.7927
Novembro	L	0.1980	87.8966	14.2834
	LI	0.2563	232.9504	44.7755
	LP	0.1769	79.6494	12.8216
	W	0.1791	95.9100	16.3448
	LIP	0.0730	13.1288	2.2250
Dezembro	L	0.1547	60.9167	9.0948
	LI	0.2357	195.2101	36.6534
	LP	0.1447	57.6447	8.6394
	W	0.1586	74.7259	12.0100
	LIP	0.0460	3.9116	0.6685

Na Figura 16 ilustramos os gráficos com as curvas empíricas e teóricas das funções de sobrevivência da distribuição Lindley inversa potência, para os dados separados mensalmente. Na Figura 17 apresentamos os histogramas, mês a mês, com a curva da função densidade estimada.

Conforme é possível verificar, a distribuição Lindley inversa potência forneceu os menores valores para os três critérios de comparação em todos os meses, além dos menores valores para as estatísticas dos testes de aderência, o que nos confirma que, dentre as distribuições testadas, a Lindley inversa potência foi a que melhor se ajustou aos dados considerados. Isso também pode ser observado nos gráficos apresentados.

Dessa forma, verificamos que a distribuição Lindley inversa potência se mostrou uma boa opção na modelagem de dados de tempo de vida em comparação a outras distribuições utilizadas na literatura.

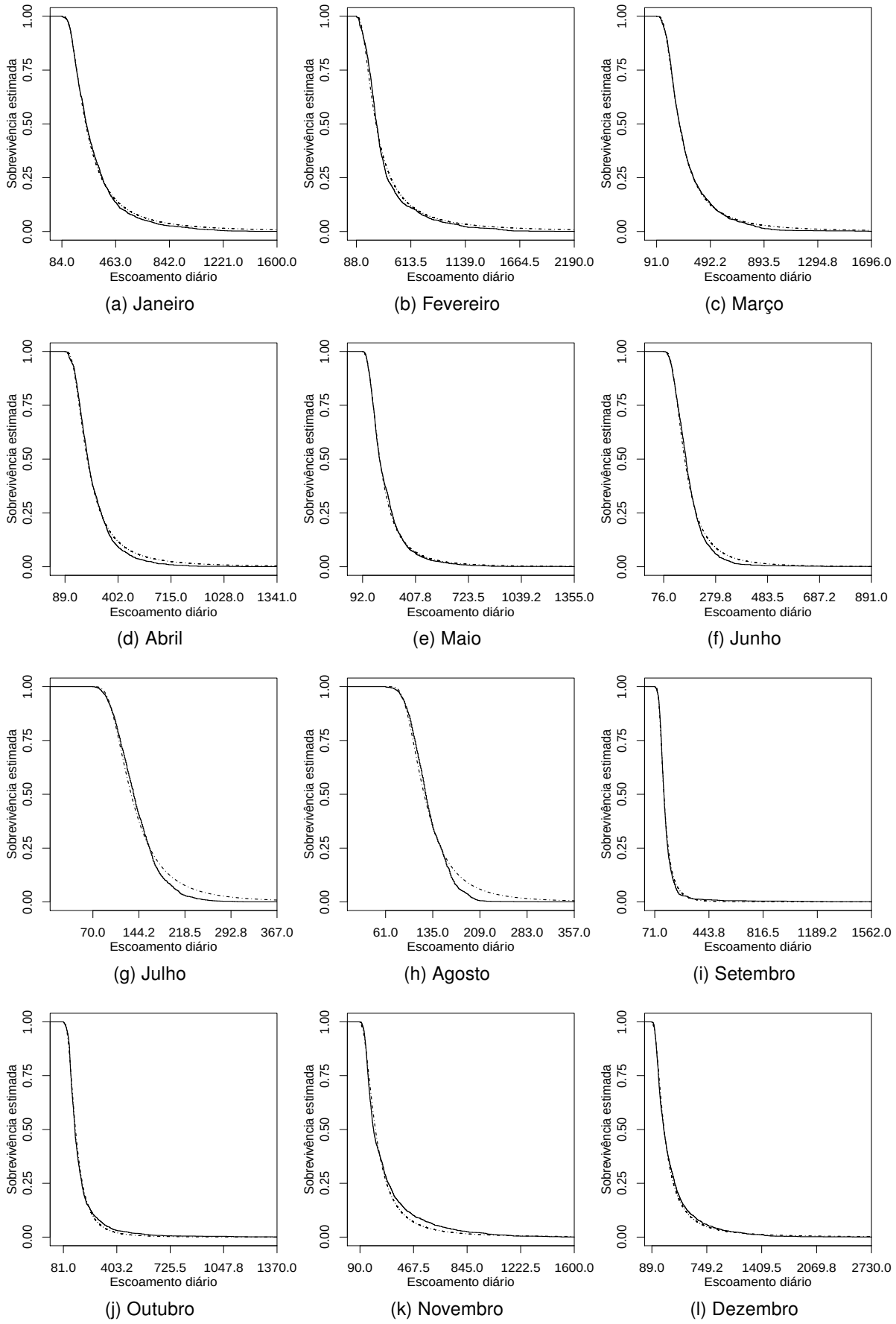


Figura 16 – Ajustes da distribuição Lindley inversa potência — dados 3 — mensal.

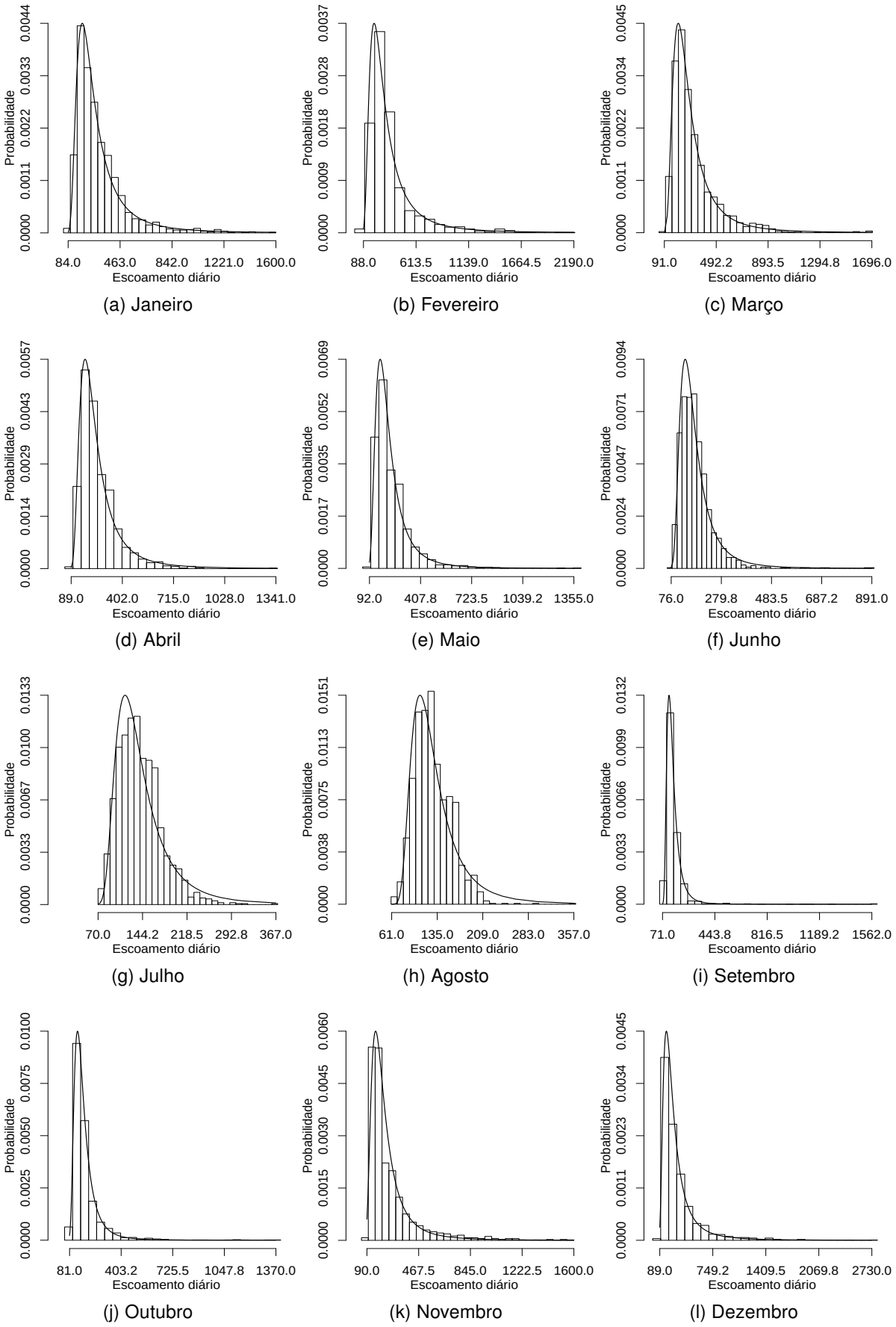


Figura 17 – Histogramas — dados 3 — mensal.

2.9 Conclusão

De acordo com os resultados obtidos pelo do estudo de simulação pode-se observar que a distribuição Lindley inversa potência possui boas propriedades para seus estimadores de verossimilhança, que resultam em pequenos valores de vício e erro quadrático médio.

Ao ser aplicada em dados reais e comparada a outras distribuições, a distribuição Lindley inversa potência ajustou-se bem aos dados, sendo um forte concorrente para as demais distribuições testadas, bem como uma boa alternativa na modelagem de dados de sobrevivência.

Além disso, verificamos que a distribuição Lindley inversa não ajustou-se aos três conjuntos de dados considerados, mostrando a importância do novo parâmetro introduzido, que nos forneceu a distribuição Lindley inversa potência, e possibilitou obter ajustes satisfatórios em todos os casos.

Capítulo 3

Distribuição Lindley Inversa Potência: Diferentes Métodos de Estimação

Resumo

Diversas distribuições de probabilidade vêm sendo propostas na literatura, principalmente, com o objetivo de se obter modelos mais flexíveis em termos do comportamento das funções densidade e de risco. Recentemente, foi proposta por (GHITANY et al., 2013) uma nova generalização da distribuição Lindley, chamada distribuição Lindley potência. Outra generalização foi proposta por Sharma et al. (2015), conhecida como distribuição Lindley inversa. A partir dessas duas generalizações foi proposta a distribuição Lindley inversa potência. O objetivo desse trabalho é comparar, por meio de simulação Monte Carlo, as propriedades dos estimadores dos parâmetros da distribuição Lindley inversa potência obtidos por nove diferentes métodos de estimação. Foi utilizado como critério de comparação o vício e erro quadrático médio das estimativas. Ao final, é apresentada a estimação dos parâmetros de dois conjuntos de dados reais da literatura, utilizando os métodos de estimação considerados.

Palavras-chave: Distribuição Lindley inversa potência, Métodos de estimação, Máxima verossimilhança, Simulação Monte Carlo.

Abstract

Several probability distributions have been proposed in the literature, especially with the aim of obtaining models that are more flexible relative to the behaviors of the density and hazard rate functions. Recently, a new generalization of the Lindley distribution was proposed by (GHITANY et al., 2013), called power Lindley distribution. Another generalization

was proposed by (SHARMA et al., 2015), known as inverse Lindley distribution. The power inverse Lindley distribution was proposed from these two generalizations. The aim of this paper is to compare through Monte Carlo simulations the properties of the estimates of the parameters of the power inverse Lindley distribution obtained by nine differents methods of estimation. The bias and mean-squared error are used as the criterion for comparison. Finally, it presents the estimation of the parameters of two sets of real data in the literature, using the methods of estimations considered.

Key-words: Power inverse Lindley distribution, Methods of estimations, Maximum likelihood, Monte Carlo Simulation.

3.1 Introdução

A distribuição Lindley proposta por Lindley (1958) possui função densidade obtida pela mistura da distribuição exponencial, com parâmetro de escala β, e a distribuição gama, com parâmetro de forma igual a 2 e de escala β. Então, sua função densidade é definida por:

$$f(x \mid \beta) = pf_1(x \mid \beta) + (1-p)f_2(x \mid 2, \beta),$$

em que:

$$p = \frac{\beta}{1+\beta}, \quad f_1(x \mid \beta) = \beta e^{-\beta x} \quad \text{e} \quad f_2(x \mid 2, \beta) = \beta^2 x e^{-\beta x},$$

portanto:

$$f(x \mid \beta) = \frac{\beta^2}{1+\beta}(1+x)e^{-\beta x}, \tag{3.1}$$

em que $x > 0$ e $\beta > 0$.

A função de distribuição acumulada e de risco são definidas, respectivamente, por:

$$F(x \mid \beta) = 1 - \left(1 + \frac{\beta x}{1+\beta}\right) e^{-\beta x}, \tag{3.2}$$

$$h(x \mid \beta) = \frac{\beta^2(1+x)}{\beta(1+x)+1}. \tag{3.3}$$

Ghitany, Atieh e Nadarajah (2008) estudaram as propriedades e aplicações dessa distribuição no contexto de análise de sobrevivência, e mostraram que ela possui propriedades matemáticas mais flexíveis do que as da distribuição exponencial.

Desde então, diversas outras generalizações da distribuição Lindley vêm sendo propostas com o objetivo de obter distribuições de probabilidade mais flexíveis em termos do comportamento da função densidade e de risco.

A distribuição Lindley inversa, proposta por Sharma et al. (2015), considera o inverso de uma variável aleatória com distribuição Lindley. Mais especificamente, se uma

variável aleatória Y possui distribuição Lindley, então a variável aleatória $X = 1/Y$ segue uma distribuição Lindley inversa com funções densidade, de distribuição acumulada e de risco definidas, respectivamente, por:

$$f(x \mid \beta) = \frac{\beta^2}{1+\beta}\left(\frac{1+x}{x^3}\right)e^{-\frac{\beta}{x}}, \tag{3.4}$$

$$F(x \mid \beta) = \left(1+\frac{\beta}{1+\beta}\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{\beta}{x}}, \tag{3.5}$$

$$h(x \mid \beta) = \frac{\beta^2(1+x)}{x^2\big[-\beta+x(1+\beta)(e^{\beta/x}-1)\big]}, \tag{3.6}$$

em que $x > 0$ e $\beta > 0$.

Outra generalização é a distribuição Lindley potência, que considera a potência de uma variável aleatória com distribuição Lindley (GHITANY et al., 2013). Ou seja, se uma variável aleatória *Y* possui distribuição Lindley, então a variável aleatória $X = Y^{\frac{1}{\alpha}}$ segue uma distribuição Lindley potência.

Assim como a distribuição Lindley, a distribuição Lindley potência pode ser obtida pela mistura de duas distribuições, sendo elas, a distribuição Weibull, com parâmetro de forma α e de escala β e a distribuição gama generalizada, com parâmetros de forma 2 e α, e de escala β, em específico:

$$f(x \mid \alpha,\beta) = pf_1(x \mid \alpha,\beta) + (1-p)f_2(x \mid 2,\alpha,\beta),$$

em que:

$$p = \frac{\beta}{1+\beta}, \quad f_1(x \mid \alpha,\beta) = \alpha\beta x^{\alpha-1}e^{-\beta x^\alpha} \quad \text{e} \quad f_2(x \mid 2,\alpha,\beta) = \alpha\beta^2 x^{2\alpha-1}e^{-\beta x^\alpha},$$

portanto:

$$f(x \mid \alpha,\beta) = \frac{\alpha\beta^2}{1+\beta}(1+x^\alpha)x^{\alpha-1}e^{-\beta x^\alpha}, \tag{3.7}$$

em que $x > 0$ e $\alpha, \beta > 0$.

A função de distribuição acumulada e de risco são definidas, respectivamente, por:

$$F(x \mid \alpha,\beta) = 1-\left(1+\frac{\beta x^\alpha}{1+\beta}\right)e^{-\beta x^\alpha}, \tag{3.8}$$

$$h(x \mid \alpha,\beta) = \alpha\beta^2\frac{(1+x^\alpha)x^{\alpha-1}}{\beta(1+x^\alpha)+1}. \tag{3.9}$$

Note que a distribuição Lindley é um caso especial da distribuição Lindley potência para $\alpha = 1$.

A partir da distribuição Lindley inversa, podemos obter a distribuição Lindley inversa potência. Para isso, considere uma variável aleatória *Y* com distribuição Lindley inversa,

então a variável aleatória $X = Y^{\frac{1}{\alpha}}$ segue uma distribuição Lindley inversa potência. Portanto, a função densidade de probabilidade da distribuição Lindley inversa potência, é dada por:

$$f(x \mid \alpha, \beta) = \frac{\alpha\beta^2}{1+\beta}\left(\frac{1+x^{\alpha}}{x^{2\alpha+1}}\right)e^{-\frac{\beta}{x^{\alpha}}}, \tag{3.10}$$

em que $x > 0$ e $\alpha, \beta > 0$, sendo α o parâmetro de locação e β o parâmetro de escala.

A função de distribuição acumulada e de risco da distribuição Lindley inversa potência são definidas, respectivamente, por:

$$F(x \mid \alpha, \beta) = \left(1 + \frac{\beta}{1+\beta}\frac{1}{x^{\alpha}}\right)e^{-\frac{\beta}{x^{\alpha}}}, \tag{3.11}$$

$$h(x \mid \alpha, \beta) = \frac{\alpha\beta^2(1+x^{-\alpha})}{x\big[-\beta + x^{\alpha}(1+\beta)(e^{\frac{\beta}{x^{\alpha}}}-1)\big]}. \tag{3.12}$$

Na Figura 1 podemos observar o comportamento da função densidade de probabilidade da distribuição Lindley inversa potência para diferentes valores de α e β, mostrando que a função densidade (3.10) é unimodal em *x*.

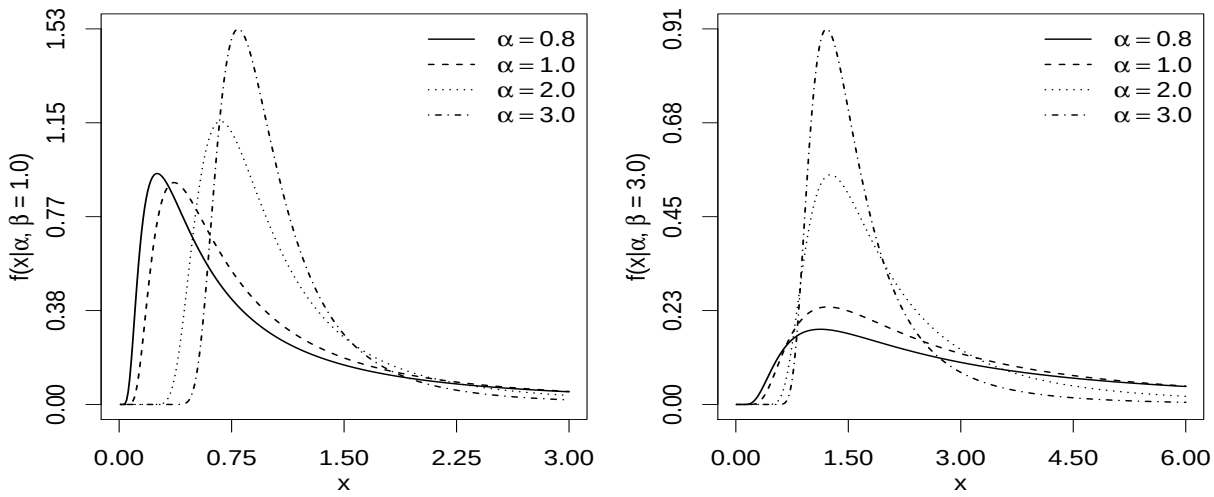


Figura 1 – Comportamento da função densidade da distribuição Lindley inversa potência para diferentes valores de α e β.

Com relação a função de risco da distribuição Lindley inversa potência, apresentada na Figura 2, observamos que possui forma de banheira invertida, logo, é unimodal em *x*.

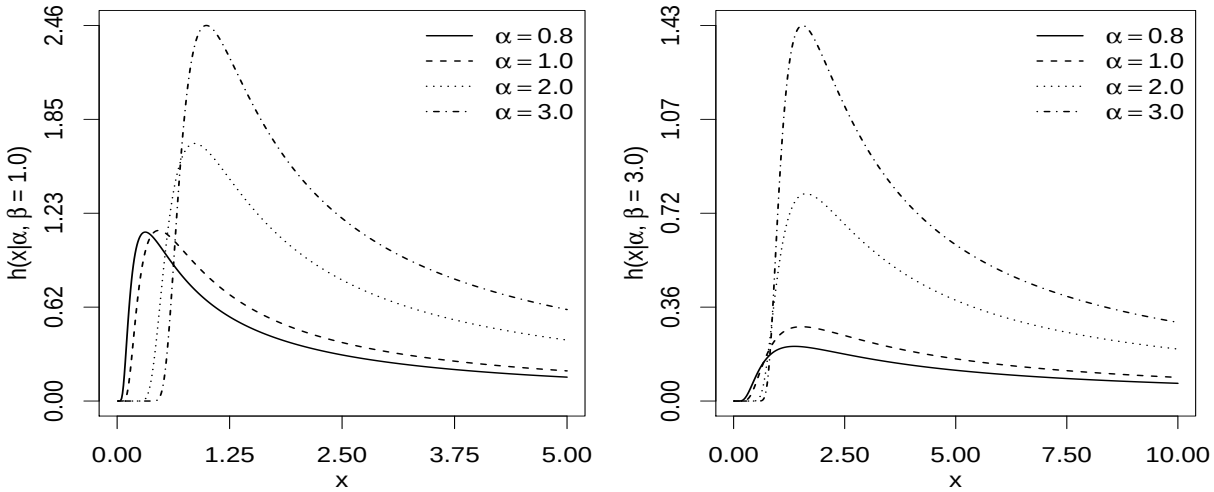


Figura 2 – Comportamento da função de risco da distribuição Lindley inversa potência para diferentes valores de α e β.

Note que a distribuição Lindley inversa é um caso especial da distribuição Lindley inversa potência, que é obtida tomando $\alpha = 1$.

O presente trabalho tem por objetivo avaliar as performances de diferentes métodos de estimação em contrapartida ao método da máxima verossimilhança, considerando como critério de comparação os valores do vício e erro quadrático médio. Na Seção 3.2 serão apresentados os métodos de estimação considerados nesse trabalho. A comparação dos métodos em termos de vício e erro quadrático médio são apresentados na Seção 3.3. As aplicações desses métodos em conjuntos de dados reais são apresentadas na Seção 3.4. Algumas conclusões sobre o estudo são apresentadas na Seção 3.5.

3.2 Métodos de Estimação

Nesta Seção são apresentados os métodos de estimação que serão utilizados para a estimação dos paramêtros α e β da distribuição Lindley inversa potência. Foi considerado o método da máxima verossimilhanças e outros oito métodos alternativos que são baseados nas estatísticas usadas na avaliação da qualidade de ajuste.

Neste trabalho utilizaremos os métodos baseados nas estatísticas dos testes de Cramer-von Mises (CvM), Kolmogorov-Smirnov (KS), Anderson-Darling (AD), e outras 5 variações do Anderson-Darling (ADR, ADL, AD2R, AD2L e AD2). Esses métodos basicamente permitem que se obtenha os valores dos parâmetros que minimizam a distância entre a função de distribuição teórica $F(x \mid \theta)$ e empírica $F_n(x \mid \theta)$ (LUCENO, 2006).

Seja $(x_1, ..., x_n)$ uma amostra de n observações de uma variável aleatória X com função de distribuição acumulada $F(x \mid \theta)$. Seja $x_{(1)}, ..., x_{(n)}$ a estatística de ordem correspondente e $F_n(x \mid \theta)$ a função de distribuição empírica, então as estatísticas dos testes

podem ser obtidas conforme apresentado na Tabela 1.

Tabela 1 – Estatísticas da função de distribuição empírica.

Estatística	Fórmula
CvM	$W_n^2 = n\int_{-\infty}^{\infty}\{F(x) - F_n(x)\}^2 dF(x)$
KS	$D_n = \sup_x \lvert F(x) - F_n(x)\rvert$
AD	$A_n^2 = n\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\{F(x)-F_n(x)\}^2}{F(x)\{1-F(x)\}} dF(x)$
ADR	$R_n^2 = n\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\{F(x)-F_n(x)\}^2}{1-F(x)} dF(x)$
ADL	$L_n^2 = n\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\{F(x)-F_n(x)\}^2}{F(x)} dF(x)$
AD2R	$r_n^2 = n\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\{F(x)-F_n(x)\}^2}{\{1-F(x)\}^2} dF(x)$
AD2L	$l_n^2 = n\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\{F(x)-F_n(x)\}^2}{\{F(x)\}^2} dF(x)$
AD2	$a_n^2 = r_n^2 + l_n^2$

Além disso, seja $z_i = F(x_{(i)} \mid \theta)$ e $F_n(x \mid \theta)$ um função "step"com saltos na estatística de ordem, então as estatísticas dos testes também podem ser escritas na forma computacional, conforme apresentado na Tabela 2 (LUCENO, 2006).

Tabela 2 – Forma computacional das estatísticas da função de distribuição empírica.

Estatística	Fórmula computacional
CvM	$W_n^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^{n}\left(z_i - \frac{i-1/2}{n}\right)^2$
KS	$D_n = \frac{1}{2n} + \max_{1\leq i\leq n}\left\lvert z_i - \frac{i-1/2}{n}\right\rvert$
AD	$A_n^2 = -n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\{\ln z_i + \ln(1 - z_{n+1-i})\}$
ADR	$R_n^2 = \frac{n}{2} - 2\sum_{i=1}^{n} z_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\ln(1 - z_{n+1-i})$
ADL	$L_n^2 = -\frac{3n}{2} + 2\sum_{i=1}^{n} z_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\ln z_i$
AD2R	$r_n^2 = 2\sum_{i=1}^{n}\ln(1 - z_i) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{2i-1}{1-z_{n+1-i}}$
AD2L	$l_n^2 = 2\sum_{i=1}^{n}\ln z_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{2i-1}{z_i}$
AD2	$a_n^2 = 2\sum_{i=1}^{n}\{\ln z_i + \ln(1 - z_i)\} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i-1}{z_i} + \frac{2i-1}{1-z_{n+1-i}}\right)$

3.2.1 Método da Máxima Verossimilhança

Sejam $x_1, ..., x_n$ valores observados de uma variável aleatória com distribuição de probabilidade Lindley inversa potência. Então, o logaritmo da função de verossimilhança (ou simplesmente função log-verossimilhança) é dada por:

$$\begin{aligned} l(\alpha, \beta \mid \mathbf{x}) &= n[\log \alpha + 2\log \beta - \log(1+\beta)] + \sum_{i=1}^{n} \log(1 + x_i^{\alpha}) \\ &\quad -(2\alpha+1)\sum_{i=1}^{n} \log x_i - \beta \sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Dessa forma, as estimativas de máxima verossimilhança $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}$ para α, β são as soluções das equações não lineares:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} l(\alpha, \beta \mid \mathbf{x}) = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{\alpha} \log x_i}{1 + x_i^{\alpha}} - 2\sum_{i=1}^{n} \log x_i + \beta \sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} \log x_i = 0, \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} l(\alpha, \beta \mid \mathbf{x}) = \frac{n(2+\beta)}{\beta(1+\beta)} - \sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} = 0. \tag{3.15}$$

Por outro lado, a equação (3.15) pode ser reescrita como:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}\right)\beta^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - n\right)\beta - 2n = 0,$$

e portanto, a estimativa de máxima verossimilhança $\widehat{\beta}$ é a única solução da equação acima, dado por:

$$\widehat{\beta}(\widehat{\alpha}) = \frac{-\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\widehat{\alpha}} - n\right) + \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\widehat{\alpha}} - n\right)^2 + 8n\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\widehat{\alpha}}}}{2\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\widehat{\alpha}}}$$

e $\widehat{\alpha}$ será obtido pela solução da equação não linear:

$$G(\alpha) = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{\alpha} \log x_i}{1 + x_i^{\alpha}} - 2\sum_{i=1}^{n} \log x_i + \widehat{\beta}(\alpha) \sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} \log x_i = 0.$$

3.2.2 Método de Cramér-von-Mises

As estimativas $\widehat{\alpha}_{CM}$ e $\widehat{\beta}_{CM}$ de Cramér-von-Mises para os parâmetros α e β, respectivamente, são obtidas pela minimização, em relação a α e β, da função:

$$W_n^2(\alpha, \beta) = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^{n} \left(F(x_{1:n} \mid \alpha, \beta) - \frac{2i-1}{2n}\right)^2. \tag{3.16}$$

Essas estimativas podem ser obtidas pela solução das equação não-lineares:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(F(x_{1:n} \mid \alpha, \beta) - \frac{2i-1}{2n}\right) \Delta_1(x_{1:n} \mid \alpha, \beta) = 0, \tag{3.17}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(F(x_{1:n} \mid \alpha, \beta) - \frac{2i-1}{2n}\right) \Delta_2(x_{1:n} \mid \alpha, \beta) = 0, \tag{3.18}$$

em que $\Delta_1(x_{1:n} \mid \alpha, \beta)$ e $\Delta_2(x_{1:n} \mid \alpha, \beta)$ são definidas, respectivamente, por:

$$\Delta_1(x_{1:n} \mid \alpha, \beta) = \frac{\beta^2 \ln(x) e^{-\frac{\beta}{\alpha^2}}}{1+\beta} \left(\frac{1}{x^\alpha} + \frac{1}{x^{2\alpha}} \right), \tag{3.19}$$

$$\Delta_2(x_{1:n} \mid \alpha, \beta) = -\frac{\beta e^{-\frac{\beta}{\alpha^2}}}{x^\alpha (1+\beta)^2} \left(2 + \beta + \frac{1+\beta}{x^\alpha} \right). \tag{3.20}$$

3.2.3 Método de Kolmogorov-Smirnov

As estimativas $\widehat{\alpha}_{KS}$ e $\widehat{\beta}_{KS}$ de Kolmogorov-Smirnov para os parâmetros α e β, respectivamente, são obtidas pela maximização, em relação a α e β, da função:

$$D_n(\alpha, \beta) = \frac{1}{2n} + \max_{1 \le i \le n} \left(\left| F(x_{1:n} \mid \alpha, \beta) - \frac{i}{n} \right|, \left| F(x_{1:n} \mid \alpha, \beta) - \frac{i-1}{n} \right| \right). \tag{3.21}$$

3.2.4 Método de Anderson-Darling

As estimativas $\widehat{\alpha}_{AD}$ e $\widehat{\beta}_{AD}$ de Anderson-Darling para os parâmetros α e β, respectivamente, são obtidas pela minimização, em relação a α e β, da função:

$$A_n^2(\alpha, \beta) = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (2i-1) \log\{F(x_{1:n} \mid \alpha, \beta)[1 - F(x_{n+1-i:n} \mid \alpha, \beta)]\}. \tag{3.22}$$

Essas estimativas podem ser obtidas pela solução das equação não-lineares:

$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1) \left[\frac{\Delta_1(x_{1:n} \mid \alpha, \beta)}{F(x_{1:n} \mid \alpha, \beta)} - \frac{\Delta_1(x_{n+1-i:n} \mid \alpha, \beta)}{F(x_{n+1-i:n} \mid \alpha, \beta)} \right] = 0, \tag{3.23}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1) \left[\frac{\Delta_2(x_{1:n} \mid \alpha, \beta)}{F(x_{1:n} \mid \alpha, \beta)} - \frac{\Delta_2(x_{n+1-i:n} \mid \alpha, \beta)}{F(x_{n+1-i:n} \mid \alpha, \beta)} \right] = 0, \tag{3.24}$$

em que $\Delta_1(x_{1:n} \mid \alpha, \beta)$ e $\Delta_2(x_{1:n} \mid \alpha, \beta)$ são definidas, respectivamente, por 3.19 e 3.20.

As estimativas dos parâmetros pelas demais variações do método de Anderson-Darling podem ser obtidas seguindo esse mesmo procedimento, por isso não são aqui apresentadas.

3.3 Estudo de Simulação

Para realizar a comparação entre a performance dos nove métodos de estimação considerados foram tomadas amostras de tamanhos $n = 20, 50, 80, 110, 140, 170, 200$ e parâmetros $(\alpha, \beta) = (0.5, 0.5), (0.5, 1.0), (0.5, 1.5), (0.5, 2.0), (1.0, 0.5), (1.0, 1.0), (1.0, 1.5), (1.0, 2.0), (1.2, 0.5), (1.2, 1.0), (1.2, 1.5)$ e $(1, 2, 2.0)$.

Para cada combinação (n, α, β) foram geradas $N = 5000$ amostras pseudo-aleatórias da distribuição Lindley inversa potência, usando o métodos da inversão da função de dis-

tribuição acumulada. Após estimar os parâmetros foram calculados os vícios e erros quadráticos médios, que são dados por:

$$\text{Vício}(\widehat{\theta}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(\widehat{\theta}_i - \theta), \quad \text{e} \quad \text{EQM}(\widehat{\theta}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(\widehat{\theta}_i - \theta)^2, \quad \text{em que} \quad \theta = \alpha, \beta.$$

As Tabelas 3 à 14 apresentam os valores do vício e erros quadrático médio para cada cenário considerado. Os valores sobrescritos indicam o $rank$ obtido por cada método de estimação, o valor $Total$ é a soma dos $ranks$ obtidos por cada método de estimação (valor sobrescrito), e o valor sobrescrito no $Total$ representa o $rank$ geral para cada método, no cenário considerado.

Tabela 3 – Resultados da simulação para $\alpha = 0.5$ e $\beta = 0.5$

n		EMV	CvM	KS	AD	ADR	ADL	AD2R	AD2L	AD2
20	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.031^{6}	0.032^{7}	0.035^{9}	0.008^{1}	0.022^{4}	0.018^{3}	0.025^{5}	0.032^{8}	0.014^{2}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.009^{3}	0.014^{7}	0.013^{5}	0.008^{1}	0.014^{6}	0.010^{4}	0.029^{9}	0.019^{8}	0.009^{2}
	Vício(β)	0.011^{6}	0.007^{3}	0.009^{4}	0.010^{5}	0.005^{2}	0.000^{1}	0.018^{8}	0.012^{7}	0.036^{9}
	EQM(β)	0.018^{1}	0.021^{4}	0.021^{5}	0.018^{2}	0.020^{3}	0.021^{6}	0.024^{8}	0.030^{9}	0.022^{7}
50	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.013^{7}	0.012^{6}	0.014^{8}	0.004^{2}	0.009^{5}	0.007^{4}	0.001^{1}	0.005^{3}	0.015^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.003^{1}	0.004^{5}	0.004^{6}	0.003^{2}	0.005^{7}	0.003^{3}	0.010^{9}	0.006^{8}	0.004^{4}
	Vício(β)	0.006^{7}	0.003^{4}	0.004^{6}	0.003^{3}	0.001^{2}	0.000^{1}	0.011^{8}	0.004^{5}	0.025^{9}
	EQM(β)	0.007^{1}	0.008^{4}	0.008^{6}	0.007^{2}	0.008^{3}	0.008^{5}	0.009^{7}	0.013^{9}	0.010^{8}
80	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.008^{7}	0.008^{6}	0.009^{8}	0.002^{2}	0.005^{5}	0.004^{3}	0.005^{4}	0.000^{1}	0.014^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.002^{1}	0.003^{5}	0.003^{6}	0.002^{2}	0.003^{7}	0.002^{3}	0.006^{9}	0.004^{8}	0.002^{4}
	Vício(β)	0.003^{6}	0.002^{3}	0.002^{5}	0.002^{4}	0.001^{2}	0.000^{1}	0.010^{8}	0.008^{7}	0.022^{9}
	EQM(β)	0.004^{1}	0.005^{4}	0.005^{6}	0.005^{2}	0.005^{3}	0.005^{5}	0.006^{7}	0.009^{9}	0.007^{8}
110	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.005^{6}	0.005^{5}	0.006^{7}	0.001^{1}	0.004^{4}	0.003^{3}	0.007^{8}	0.003^{2}	0.013^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.001^{1}	0.002^{4}	0.002^{6}	0.001^{2}	0.002^{7}	0.001^{3}	0.005^{9}	0.003^{8}	0.002^{5}
	Vício(β)	0.002^{6}	0.001^{3}	0.002^{4}	0.002^{5}	0.001^{2}	0.000^{1}	0.008^{7}	0.009^{8}	0.019^{9}
	EQM(β)	0.003^{1}	0.004^{4}	0.004^{6}	0.003^{2}	0.004^{3}	0.004^{5}	0.004^{7}	0.007^{9}	0.005^{8}
140	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.004^{6}	0.004^{5}	0.005^{7}	0.001^{1}	0.003^{3}	0.002^{2}	0.008^{8}	0.003^{4}	0.012^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.001^{1}	0.001^{4}	0.001^{5}	0.001^{2}	0.002^{7}	0.001^{3}	0.004^{9}	0.002^{8}	0.001^{6}
	Vício(β)	0.002^{6}	0.001^{4}	0.002^{5}	0.001^{3}	0.000^{2}	0.000^{1}	0.007^{7}	0.009^{8}	0.017^{9}
	EQM(β)	0.003^{1}	0.003^{4}	0.003^{5}	0.003^{2}	0.003^{3}	0.003^{6}	0.003^{7}	0.006^{9}	0.004^{8}
170	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.003^{5}	0.003^{4}	0.004^{6}	0.001^{1}	0.002^{3}	0.002^{2}	0.008^{8}	0.004^{7}	0.012^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.001^{1}	0.001^{4}	0.001^{5}	0.001^{2}	0.001^{7}	0.001^{3}	0.003^{9}	0.002^{8}	0.001^{6}
	Vício(β)	0.002^{6}	0.001^{3}	0.001^{4}	0.001^{5}	0.000^{2}	0.000^{1}	0.007^{7}	0.010^{8}	0.016^{9}
	EQM(β)	0.002^{1}	0.002^{4}	0.002^{6}	0.002^{2}	0.002^{3}	0.002^{5}	0.003^{7}	0.005^{9}	0.003^{8}
200	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.003^{6}	0.002^{4}	0.003^{5}	0.000^{1}	0.002^{3}	0.001^{2}	0.008^{8}	0.005^{7}	0.011^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.001^{1}	0.001^{4}	0.001^{5}	0.001^{2}	0.001^{6}	0.001^{3}	0.003^{9}	0.002^{8}	0.001^{7}
	Vício(β)	0.001^{6}	0.001^{2}	0.001^{4}	0.001^{5}	0.001^{3}	0.000^{1}	0.006^{7}	0.009^{8}	0.015^{9}
	EQM(β)	0.002^{1}	0.002^{4}	0.002^{5}	0.002^{2}	0.002^{3}	0.002^{6}	0.002^{7}	0.004^{9}	0.003^{8}
	Total	102^{3}	120^{5}	159^{6}	66^{1}	110^{4}	86^{2}	207^{8}	202^{7}	208^{9}

Tabela 4 – Resultados da simulação para $\alpha = 0.5$ e $\beta = 1.0$

n		EMV	CvM	KS	AD	ADR	ADL	AD2R	AD2L	AD2
20	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.035^{6}	0.036^{8}	0.039^{9}	0.009^{1}	0.026^{4}	0.020^{3}	0.034^{5}	0.036^{7}	0.014^{2}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.011^{3}	0.017^{7}	0.016^{5}	0.010^{1}	0.017^{6}	0.012^{4}	0.039^{9}	0.022^{8}	0.010^{2}
	Vício(β)	0.003^{1}	0.010^{3}	0.010^{4}	0.015^{5}	0.024^{7}	0.004^{2}	0.087^{9}	0.019^{6}	0.032^{8}
	EQM(β)	0.046^{3}	0.050^{6}	0.052^{7}	0.043^{1}	0.050^{5}	0.047^{4}	1.832^{9}	0.060^{8}	0.044^{2}
50	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.014^{7}	0.014^{6}	0.015^{8}	0.004^{2}	0.011^{5}	0.007^{4}	0.004^{1}	0.006^{3}	0.016^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.003^{1}	0.005^{5}	0.005^{6}	0.004^{2}	0.006^{7}	0.004^{3}	0.011^{9}	0.007^{8}	0.004^{4}
	Vício(β)	0.001^{2}	0.002^{5}	0.002^{4}	0.004^{6}	0.007^{7}	0.001^{1}	0.016^{8}	0.001^{3}	0.020^{9}
	EQM(β)	0.017^{2}	0.018^{4}	0.019^{7}	0.017^{1}	0.018^{3}	0.018^{5}	0.021^{8}	0.024^{9}	0.019^{6}
80	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.009^{6}	0.009^{7}	0.010^{8}	0.003^{2}	0.006^{5}	0.005^{4}	0.003^{3}	0.000^{1}	0.015^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.002^{1}	0.003^{5}	0.003^{6}	0.002^{2}	0.003^{7}	0.002^{3}	0.007^{9}	0.004^{8}	0.003^{4}
	Vício(β)	0.001^{1}	0.002^{4}	0.002^{3}	0.004^{5}	0.006^{7}	0.002^{2}	0.009^{8}	0.005^{6}	0.019^{9}
	EQM(β)	0.010^{2}	0.011^{4}	0.012^{6}	0.010^{1}	0.011^{3}	0.011^{5}	0.012^{7}	0.016^{9}	0.012^{8}
110	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.006^{7}	0.006^{6}	0.006^{8}	0.001^{1}	0.004^{4}	0.003^{3}	0.006^{5}	0.002^{2}	0.014^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.001^{1}	0.002^{5}	0.002^{6}	0.002^{2}	0.002^{7}	0.002^{3}	0.005^{9}	0.003^{8}	0.002^{4}
	Vício(β)	0.000^{1}	0.001^{3}	0.001^{4}	0.002^{5}	0.003^{6}	0.000^{2}	0.004^{7}	0.006^{8}	0.016^{9}
	EQM(β)	0.008^{1}	0.008^{4}	0.008^{6}	0.008^{2}	0.008^{3}	0.008^{5}	0.009^{7}	0.012^{9}	0.009^{8}
140	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.005^{6}	0.005^{5}	0.005^{7}	0.001^{1}	0.003^{4}	0.002^{2}	0.007^{8}	0.003^{3}	0.013^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.001^{1}	0.002^{4}	0.002^{6}	0.001^{2}	0.002^{7}	0.001^{3}	0.004^{9}	0.002^{8}	0.002^{5}
	Vício(β)	0.001^{4}	0.000^{2}	0.000^{3}	0.001^{5}	0.002^{7}	0.000^{1}	0.001^{6}	0.007^{8}	0.014^{9}
	EQM(β)	0.006^{1}	0.006^{4}	0.006^{6}	0.006^{2}	0.006^{3}	0.006^{5}	0.007^{7}	0.010^{9}	0.007^{8}
170	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.004^{5}	0.004^{4}	0.004^{6}	0.001^{1}	0.003^{3}	0.002^{2}	0.008^{8}	0.004^{7}	0.013^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.001^{1}	0.001^{4}	0.001^{6}	0.001^{2}	0.001^{7}	0.001^{3}	0.004^{9}	0.002^{8}	0.001^{5}
	Vício(β)	0.000^{3}	0.001^{4}	0.001^{5}	0.001^{6}	0.002^{7}	0.000^{1}	0.000^{2}	0.008^{8}	0.013^{9}
	EQM(β)	0.005^{1}	0.005^{4}	0.005^{6}	0.005^{2}	0.005^{3}	0.005^{5}	0.006^{7}	0.008^{9}	0.006^{8}
200	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.003^{6}	0.003^{4}	0.003^{5}	0.001^{1}	0.002^{3}	0.002^{2}	0.008^{8}	0.004^{7}	0.012^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.001^{1}	0.001^{4}	0.001^{5}	0.001^{2}	0.001^{7}	0.001^{3}	0.003^{9}	0.002^{8}	0.001^{6}
	Vício(β)	0.001^{4}	0.000^{1}	0.000^{2}	0.001^{6}	0.002^{7}	0.000^{3}	0.001^{5}	0.008^{8}	0.012^{9}
	EQM(β)	0.004^{1}	0.004^{4}	0.004^{6}	0.004^{2}	0.004^{3}	0.004^{5}	0.005^{7}	0.007^{9}	0.005^{8}
	Total	79^{2}	126^{4}	160^{6}	71^{1}	147^{5}	88^{3}	198^{9}	195^{7}	196^{8}

Tabela 5 – Resultados da simulação para $\alpha = 0.5$ e $\beta = 1.5$

n		EMV	CvM	KS	AD	ADR	ADL	AD2R	AD2L	AD2
20	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.038^{6}	0.039^{7}	0.042^{9}	0.010^{1}	0.028^{4}	0.022^{3}	0.036^{5}	0.040^{8}	0.013^{2}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.012^{3}	0.019^{7}	0.018^{5}	0.010^{1}	0.018^{6}	0.013^{4}	0.040^{9}	0.025^{8}	0.011^{2}
	Vício(β)	0.044^{5}	0.061^{6}	0.065^{7}	0.030^{4}	0.073^{8}	0.023^{2}	1.507^{9}	0.004^{1}	0.024^{3}
	EQM(β)	0.100^{4}	0.139^{7}	0.134^{6}	0.090^{2}	0.149^{8}	0.093^{3}	7285.857^{9}	0.102^{5}	0.081^{1}
50	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.015^{7}	0.015^{6}	0.016^{9}	0.005^{2}	0.011^{5}	0.008^{4}	0.004^{1}	0.007^{3}	0.016^{8}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.004^{1}	0.006^{5}	0.006^{6}	0.004^{2}	0.006^{7}	0.004^{4}	0.012^{9}	0.007^{8}	0.004^{3}
	Vício(β)	0.014^{5}	0.018^{6}	0.020^{7}	0.009^{4}	0.024^{8}	0.007^{2}	0.039^{9}	0.002^{1}	0.008^{3}
	EQM(β)	0.033^{3}	0.037^{6}	0.039^{7}	0.032^{2}	0.041^{8}	0.033^{4}	0.083^{9}	0.036^{5}	0.031^{1}
80	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.009^{6}	0.009^{7}	0.010^{8}	0.003^{3}	0.007^{5}	0.005^{4}	0.003^{2}	0.001^{1}	0.015^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.002^{1}	0.003^{5}	0.003^{6}	0.002^{2}	0.003^{7}	0.003^{3}	0.007^{9}	0.004^{8}	0.003^{4}
	Vício(β)	0.010^{5}	0.013^{6}	0.014^{7}	0.008^{3}	0.016^{9}	0.006^{2}	0.015^{8}	0.003^{1}	0.008^{4}
	EQM(β)	0.020^{3}	0.022^{5}	0.023^{7}	0.020^{1}	0.024^{8}	0.020^{4}	0.045^{9}	0.023^{6}	0.020^{2}
110	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.006^{7}	0.006^{6}	0.007^{8}	0.002^{1}	0.005^{4}	0.003^{3}	0.005^{5}	0.002^{2}	0.014^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.002^{1}	0.002^{5}	0.002^{6}	0.002^{2}	0.003^{7}	0.002^{3}	0.006^{9}	0.003^{8}	0.002^{4}
	Vício(β)	0.006^{6}	0.008^{7}	0.009^{8}	0.004^{4}	0.010^{9}	0.003^{2}	0.004^{3}	0.003^{1}	0.005^{5}
	EQM(β)	0.014^{1}	0.016^{5}	0.016^{7}	0.014^{2}	0.017^{8}	0.014^{4}	0.032^{9}	0.016^{6}	0.014^{3}
140	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.005^{6}	0.005^{5}	0.005^{7}	0.001^{1}	0.004^{4}	0.003^{2}	0.007^{8}	0.003^{3}	0.013^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.001^{1}	0.002^{5}	0.002^{6}	0.001^{2}	0.002^{7}	0.001^{3}	0.004^{9}	0.003^{8}	0.002^{4}
	Vício(β)	0.004^{6}	0.005^{7}	0.006^{8}	0.002^{2}	0.007^{9}	0.002^{1}	0.003^{4}	0.003^{3}	0.004^{5}
	EQM(β)	0.011^{1}	0.012^{5}	0.013^{6}	0.011^{2}	0.013^{8}	0.011^{3}	0.025^{9}	0.013^{7}	0.011^{4}
170	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.004^{5}	0.004^{4}	0.004^{7}	0.001^{1}	0.003^{3}	0.002^{2}	0.007^{8}	0.004^{6}	0.013^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.001^{1}	0.001^{5}	0.002^{6}	0.001^{2}	0.002^{7}	0.001^{3}	0.004^{9}	0.002^{8}	0.001^{4}
	Vício(β)	0.003^{3}	0.004^{6}	0.005^{7}	0.002^{2}	0.006^{9}	0.002^{1}	0.006^{8}	0.004^{5}	0.004^{4}
	EQM(β)	0.009^{1}	0.010^{5}	0.010^{6}	0.009^{2}	0.010^{7}	0.009^{3}	0.021^{9}	0.011^{8}	0.010^{4}
200	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.003^{6}	0.003^{4}	0.003^{5}	0.001^{1}	0.002^{3}	0.002^{2}	0.008^{8}	0.004^{7}	0.012^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.001^{1}	0.001^{4}	0.001^{6}	0.001^{2}	0.001^{7}	0.001^{3}	0.003^{9}	0.002^{8}	0.001^{5}
	Vício(β)	0.002^{3}	0.003^{4}	0.004^{6}	0.001^{2}	0.004^{8}	0.001^{1}	0.008^{9}	0.004^{7}	0.003^{5}
	EQM(β)	0.007^{1}	0.008^{5}	0.008^{6}	0.007^{2}	0.009^{7}	0.008^{3}	0.018^{9}	0.009^{8}	0.008^{4}
	Total	99^{3}	155^{6}	189^{7}	57^{1}	190^{8}	78^{2}	213^{9}	150^{5}	129^{4}

Tabela 6 – Resultados da simulação para $\alpha = 0.5$ e $\beta = 2.0$

n		EMV	CvM	KS	AD	ADR	ADL	AD2R	AD2L	AD2
20	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.039^{6}	0.040^{7}	0.043^{9}	0.011^{1}	0.028^{4}	0.023^{3}	0.035^{5}	0.042^{8}	0.013^{2}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.013^{3}	0.020^{7}	0.019^{6}	0.011^{2}	0.019^{5}	0.014^{4}	0.039^{9}	0.027^{8}	0.011^{1}
	Vício(β)	0.109^{5}	0.148^{6}	0.154^{7}	0.056^{3}	0.154^{8}	0.059^{4}	22.518^{9}	0.039^{2}	0.019^{1}
	EQM(β)	0.223^{5}	0.468^{8}	0.370^{6}	0.191^{2}	0.442^{7}	0.195^{3}	2228393.976^{9}	0.211^{4}	0.163^{1}
50	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.015^{7}	0.015^{6}	0.017^{9}	0.005^{2}	0.012^{5}	0.008^{4}	0.004^{1}	0.008^{3}	0.016^{8}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.004^{1}	0.006^{5}	0.006^{6}	0.004^{2}	0.006^{7}	0.005^{4}	0.012^{9}	0.008^{8}	0.004^{3}
	Vício(β)	0.036^{5}	0.045^{6}	0.049^{7}	0.019^{3}	0.051^{8}	0.019^{4}	0.077^{9}	0.004^{1}	0.008^{2}
	EQM(β)	0.064^{5}	0.081^{6}	0.085^{7}	0.063^{3}	0.097^{8}	0.063^{4}	0.261^{9}	0.061^{2}	0.056^{1}
80	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.010^{6}	0.010^{7}	0.010^{8}	0.003^{3}	0.007^{5}	0.006^{4}	0.003^{2}	0.001^{1}	0.015^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.002^{1}	0.003^{5}	0.003^{6}	0.002^{2}	0.004^{7}	0.003^{3}	0.007^{9}	0.005^{8}	0.003^{4}
	Vício(β)	0.025^{5}	0.030^{7}	0.033^{9}	0.014^{3}	0.033^{8}	0.015^{4}	0.029^{6}	0.004^{1}	0.007^{2}
	EQM(β)	0.037^{3}	0.047^{6}	0.049^{7}	0.037^{5}	0.054^{8}	0.037^{4}	0.132^{9}	0.035^{2}	0.034^{1}
110	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.007^{7}	0.006^{6}	0.007^{8}	0.002^{1}	0.005^{4}	0.004^{3}	0.005^{5}	0.002^{2}	0.014^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.002^{1}	0.002^{5}	0.002^{6}	0.002^{2}	0.003^{7}	0.002^{3}	0.006^{9}	0.003^{8}	0.002^{4}
	Vício(β)	0.015^{6}	0.019^{7}	0.021^{8}	0.008^{3}	0.021^{9}	0.008^{4}	0.007^{2}	0.000^{1}	0.010^{5}
	EQM(β)	0.025^{3}	0.032^{6}	0.034^{7}	0.026^{5}	0.037^{8}	0.026^{4}	0.093^{9}	0.025^{1}	0.025^{2}
140	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.005^{6}	0.005^{5}	0.006^{7}	0.001^{1}	0.004^{4}	0.003^{2}	0.007^{8}	0.003^{3}	0.013^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.001^{1}	0.002^{5}	0.002^{6}	0.001^{2}	0.002^{7}	0.001^{3}	0.004^{9}	0.003^{8}	0.002^{4}
	Vício(β)	0.011^{6}	0.014^{7}	0.015^{8}	0.005^{3}	0.016^{9}	0.005^{4}	0.005^{2}	0.001^{1}	0.011^{5}
	EQM(β)	0.020^{2}	0.024^{6}	0.026^{7}	0.020^{5}	0.029^{8}	0.020^{4}	0.074^{9}	0.019^{1}	0.020^{3}
170	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.004^{6}	0.004^{4}	0.004^{7}	0.001^{1}	0.003^{3}	0.002^{2}	0.008^{8}	0.004^{5}	0.013^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.001^{1}	0.001^{5}	0.002^{6}	0.001^{2}	0.002^{7}	0.001^{3}	0.004^{9}	0.002^{8}	0.001^{4}
	Vício(β)	0.009^{4}	0.011^{7}	0.013^{9}	0.004^{2}	0.013^{8}	0.004^{3}	0.011^{6}	0.000^{1}	0.010^{5}
	EQM(β)	0.016^{2}	0.019^{6}	0.021^{7}	0.017^{5}	0.023^{8}	0.016^{3}	0.061^{9}	0.016^{1}	0.016^{4}
200	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.004^{6}	0.003^{4}	0.003^{5}	0.001^{1}	0.002^{3}	0.002^{2}	0.008^{8}	0.004^{7}	0.012^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.001^{1}	0.001^{4}	0.001^{6}	0.001^{2}	0.001^{7}	0.001^{3}	0.003^{9}	0.002^{8}	0.001^{5}
	Vício(β)	0.007^{4}	0.008^{5}	0.009^{7}	0.003^{2}	0.009^{6}	0.003^{3}	0.015^{9}	0.001^{1}	0.010^{8}
	EQM(β)	0.013^{1}	0.016^{6}	0.017^{7}	0.014^{5}	0.019^{8}	0.013^{3}	0.053^{9}	0.013^{2}	0.014^{4}
	Total	109^{4}	164^{6}	198^{8}	73^{1}	186^{7}	94^{2}	206^{9}	106^{3}	124^{5}

Tabela 7 – Resultados da simulação para $\alpha = 1.0$ e $\beta = 0.5$

n		EMV	CvM	KS	AD	ADR	ADL	AD2R	AD2L	AD2
20	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.062^{6}	0.064^{7}	0.070^{9}	0.016^{1}	0.043^{4}	0.035^{3}	0.050^{5}	0.065^{8}	0.029^{2}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.036^{3}	0.055^{7}	0.053^{5}	0.033^{1}	0.054^{6}	0.040^{4}	0.117^{9}	0.076^{8}	0.035^{2}
	Vício(β)	0.011^{6}	0.007^{3}	0.009^{4}	0.010^{5}	0.005^{2}	0.000^{1}	0.018^{8}	0.012^{7}	0.036^{9}
	EQM(β)	0.018^{1}	0.021^{4}	0.021^{5}	0.018^{2}	0.020^{3}	0.021^{6}	0.024^{8}	0.030^{9}	0.022^{7}
50	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.025^{7}	0.024^{6}	0.027^{8}	0.007^{2}	0.018^{5}	0.013^{4}	0.002^{1}	0.010^{3}	0.031^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.012^{1}	0.017^{5}	0.018^{6}	0.012^{2}	0.018^{7}	0.014^{3}	0.039^{9}	0.024^{8}	0.014^{4}
	Vício(β)	0.006^{7}	0.003^{4}	0.005^{6}	0.003^{3}	0.001^{2}	0.000^{1}	0.011^{8}	0.004^{5}	0.025^{9}
	EQM(β)	0.007^{1}	0.008^{4}	0.008^{6}	0.007^{2}	0.008^{3}	0.008^{5}	0.009^{7}	0.013^{9}	0.010^{8}
80	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.016^{7}	0.016^{6}	0.017^{8}	0.005^{2}	0.011^{5}	0.009^{3}	0.010^{4}	0.000^{1}	0.029^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.007^{1}	0.010^{5}	0.010^{6}	0.007^{2}	0.011^{7}	0.008^{3}	0.025^{9}	0.014^{8}	0.009^{4}
	Vício(β)	0.003^{6}	0.002^{3}	0.002^{5}	0.002^{4}	0.001^{2}	0.000^{1}	0.010^{8}	0.008^{7}	0.022^{9}
	EQM(β)	0.004^{1}	0.005^{4}	0.005^{5}	0.005^{2}	0.005^{3}	0.005^{6}	0.006^{7}	0.009^{9}	0.007^{8}
110	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.011^{6}	0.010^{5}	0.011^{7}	0.003^{1}	0.007^{4}	0.006^{3}	0.013^{8}	0.005^{2}	0.027^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.005^{1}	0.007^{4}	0.007^{6}	0.005^{2}	0.008^{7}	0.006^{3}	0.019^{9}	0.011^{8}	0.007^{5}
	Vício(β)	0.002^{6}	0.001^{3}	0.002^{5}	0.002^{4}	0.001^{2}	0.000^{1}	0.008^{7}	0.009^{8}	0.019^{9}
	EQM(β)	0.003^{1}	0.004^{4}	0.004^{6}	0.003^{2}	0.004^{3}	0.004^{5}	0.004^{7}	0.007^{9}	0.005^{8}
140	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.009^{6}	0.008^{5}	0.009^{7}	0.002^{1}	0.006^{3}	0.004^{2}	0.015^{8}	0.007^{4}	0.025^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.004^{1}	0.005^{4}	0.006^{5}	0.004^{2}	0.006^{7}	0.005^{3}	0.015^{9}	0.009^{8}	0.006^{6}
	Vício(β)	0.002^{6}	0.001^{4}	0.002^{5}	0.001^{3}	0.000^{2}	0.000^{1}	0.007^{7}	0.009^{8}	0.017^{9}
	EQM(β)	0.003^{1}	0.003^{4}	0.003^{5}	0.003^{2}	0.003^{3}	0.003^{6}	0.003^{7}	0.006^{9}	0.004^{8}
170	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.007^{5}	0.006^{4}	0.007^{6}	0.001^{1}	0.004^{3}	0.003^{2}	0.016^{8}	0.009^{7}	0.024^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.003^{1}	0.004^{4}	0.005^{5}	0.003^{2}	0.005^{7}	0.004^{3}	0.013^{9}	0.007^{8}	0.005^{6}
	Vício(β)	0.002^{6}	0.001^{3}	0.001^{4}	0.001^{5}	0.000^{2}	0.000^{1}	0.007^{7}	0.010^{8}	0.016^{9}
	EQM(β)	0.002^{1}	0.002^{4}	0.002^{6}	0.002^{2}	0.002^{3}	0.002^{5}	0.003^{7}	0.005^{9}	0.003^{8}
200	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.006^{6}	0.005^{4}	0.006^{5}	0.001^{1}	0.003^{3}	0.003^{2}	0.017^{8}	0.009^{7}	0.023^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.003^{1}	0.004^{4}	0.004^{5}	0.003^{2}	0.004^{6}	0.003^{3}	0.011^{9}	0.006^{8}	0.004^{7}
	Vício(β)	0.001^{6}	0.001^{2}	0.001^{4}	0.001^{5}	0.001^{3}	0.000^{1}	0.006^{7}	0.009^{8}	0.015^{9}
	EQM(β)	0.002^{1}	0.002^{4}	0.002^{5}	0.002^{2}	0.002^{3}	0.002^{6}	0.002^{7}	0.004^{9}	0.003^{8}
	Total	102^{3}	120^{5}	159^{6}	65^{1}	110^{4}	87^{2}	207^{8}	202^{7}	208^{9}

Tabela 8 – Resultados da simulação para $\alpha = 1.0$ e $\beta = 1.0$

n		EMV	CvM	KS	AD	ADR	ADL	AD2R	AD2L	AD2
20	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.070^{6}	0.073^{8}	0.079^{9}	0.019^{1}	0.051^{4}	0.039^{3}	0.067^{5}	0.072^{7}	0.028^{2}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.043^{3}	0.068^{7}	0.066^{5}	0.038^{1}	0.067^{6}	0.047^{4}	0.154^{9}	0.089^{8}	0.040^{2}
	Vício(β)	0.003^{1}	0.010^{3}	0.011^{4}	0.015^{5}	0.024^{7}	0.004^{2}	0.087^{9}	0.019^{6}	0.032^{8}
	EQM(β)	0.046^{3}	0.050^{6}	0.052^{7}	0.043^{1}	0.050^{5}	0.047^{4}	1.833^{9}	0.060^{8}	0.044^{2}
50	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.028^{7}	0.027^{6}	0.031^{8}	0.008^{2}	0.021^{5}	0.015^{4}	0.007^{1}	0.013^{3}	0.031^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.014^{1}	0.021^{5}	0.021^{6}	0.014^{2}	0.022^{7}	0.016^{3}	0.046^{9}	0.026^{8}	0.016^{4}
	Vício(β)	0.001^{2}	0.002^{5}	0.002^{4}	0.004^{6}	0.007^{7}	0.001^{1}	0.016^{8}	0.001^{3}	0.020^{9}
	EQM(β)	0.017^{2}	0.018^{4}	0.019^{7}	0.017^{1}	0.018^{3}	0.018^{5}	0.021^{8}	0.024^{9}	0.019^{6}
80	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.018^{6}	0.018^{7}	0.019^{8}	0.005^{2}	0.013^{5}	0.010^{4}	0.006^{3}	0.001^{1}	0.030^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.008^{1}	0.012^{5}	0.012^{6}	0.009^{2}	0.013^{7}	0.009^{3}	0.029^{9}	0.016^{8}	0.011^{4}
	Vício(β)	0.001^{1}	0.002^{3}	0.002^{4}	0.004^{5}	0.006^{7}	0.002^{2}	0.009^{8}	0.005^{6}	0.019^{9}
	EQM(β)	0.010^{2}	0.011^{4}	0.012^{6}	0.010^{1}	0.011^{3}	0.011^{5}	0.012^{7}	0.016^{9}	0.012^{8}
110	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.012^{7}	0.011^{6}	0.013^{8}	0.003^{1}	0.009^{4}	0.006^{3}	0.011^{5}	0.005^{2}	0.028^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.006^{1}	0.008^{5}	0.009^{6}	0.006^{2}	0.009^{7}	0.007^{3}	0.022^{9}	0.012^{8}	0.008^{4}
	Vício(β)	0.000^{1}	0.001^{3}	0.001^{4}	0.002^{5}	0.003^{6}	0.000^{2}	0.004^{7}	0.006^{8}	0.016^{9}
	EQM(β)	0.008^{1}	0.008^{4}	0.008^{6}	0.008^{2}	0.008^{3}	0.008^{5}	0.009^{7}	0.012^{9}	0.009^{8}
140	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.010^{6}	0.009^{5}	0.010^{7}	0.002^{1}	0.007^{4}	0.005^{2}	0.014^{8}	0.007^{3}	0.026^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.004^{1}	0.006^{4}	0.007^{6}	0.005^{2}	0.007^{7}	0.005^{3}	0.017^{9}	0.010^{8}	0.006^{5}
	Vício(β)	0.001^{4}	0.000^{2}	0.000^{3}	0.001^{5}	0.002^{7}	0.000^{1}	0.001^{6}	0.007^{8}	0.014^{9}
	EQM(β)	0.006^{1}	0.006^{4}	0.006^{6}	0.006^{2}	0.006^{3}	0.006^{5}	0.007^{7}	0.010^{9}	0.007^{8}
170	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.008^{5}	0.007^{4}	0.008^{6}	0.002^{1}	0.005^{3}	0.004^{2}	0.015^{8}	0.009^{7}	0.025^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.004^{1}	0.005^{4}	0.006^{6}	0.004^{2}	0.006^{7}	0.004^{3}	0.015^{9}	0.008^{8}	0.005^{5}
	Vício(β)	0.000^{3}	0.001^{4}	0.001^{5}	0.001^{6}	0.002^{7}	0.000^{1}	0.000^{2}	0.008^{8}	0.013^{9}
	EQM(β)	0.005^{1}	0.005^{4}	0.005^{6}	0.005^{2}	0.005^{3}	0.005^{5}	0.006^{7}	0.008^{9}	0.006^{8}
200	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.006^{6}	0.005^{4}	0.006^{5}	0.001^{1}	0.004^{3}	0.003^{2}	0.016^{8}	0.009^{7}	0.024^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.003^{1}	0.004^{4}	0.005^{5}	0.003^{2}	0.005^{7}	0.004^{3}	0.013^{9}	0.007^{8}	0.005^{6}
	Vício(β)	0.001^{4}	0.000^{1}	0.000^{3}	0.001^{6}	0.002^{7}	0.000^{2}	0.001^{5}	0.008^{8}	0.012^{9}
	EQM(β)	0.004^{1}	0.004^{4}	0.004^{6}	0.004^{2}	0.004^{3}	0.004^{5}	0.005^{7}	0.007^{9}	0.005^{8}
	Total	79^{2}	125^{4}	162^{6}	71^{1}	147^{5}	87^{3}	198^{9}	195^{7}	196^{8}

Tabela 9 – Resultados da simulação para $\alpha = 1.0$ e $\beta = 1.5$

n		EMV	CvM	KS	AD	ADR	ADL	AD2R	AD2L	AD2
20	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.075^{6}	0.079^{7}	0.085^{9}	0.021^{1}	0.055^{4}	0.043^{3}	0.071^{5}	0.080^{8}	0.026^{2}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.048^{3}	0.077^{7}	0.073^{5}	0.042^{1}	0.074^{6}	0.053^{4}	0.159^{9}	0.101^{8}	0.042^{2}
	Vício(β)	0.044^{5}	0.061^{6}	0.065^{7}	0.030^{4}	0.073^{8}	0.023^{2}	1.510^{9}	0.004^{1}	0.024^{3}
	EQM(β)	0.100^{4}	0.139^{7}	0.134^{6}	0.090^{2}	0.149^{8}	0.093^{3}	7297.479^{9}	0.102^{5}	0.081^{1}
50	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.030^{7}	0.030^{6}	0.033^{9}	0.009^{2}	0.023^{5}	0.016^{4}	0.009^{1}	0.015^{3}	0.031^{8}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.015^{1}	0.023^{5}	0.024^{6}	0.016^{2}	0.024^{7}	0.018^{4}	0.048^{9}	0.029^{8}	0.017^{3}
	Vício(β)	0.014^{5}	0.018^{6}	0.020^{7}	0.009^{4}	0.024^{8}	0.007^{2}	0.039^{9}	0.002^{1}	0.008^{3}
	EQM(β)	0.033^{3}	0.037^{6}	0.039^{7}	0.032^{2}	0.041^{8}	0.033^{4}	0.083^{9}	0.036^{5}	0.031^{1}
80	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.019^{6}	0.019^{7}	0.021^{8}	0.006^{3}	0.013^{5}	0.011^{4}	0.006^{2}	0.002^{1}	0.030^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.009^{1}	0.013^{5}	0.013^{6}	0.009^{2}	0.014^{7}	0.010^{3}	0.030^{9}	0.017^{8}	0.011^{4}
	Vício(β)	0.010^{5}	0.013^{6}	0.014^{7}	0.008^{3}	0.016^{9}	0.006^{2}	0.015^{8}	0.003^{1}	0.008^{4}
	EQM(β)	0.020^{3}	0.022^{5}	0.023^{7}	0.020^{1}	0.024^{8}	0.020^{4}	0.045^{9}	0.023^{6}	0.020^{2}
110	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.013^{7}	0.012^{6}	0.014^{8}	0.003^{1}	0.009^{4}	0.007^{3}	0.011^{5}	0.004^{2}	0.028^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.006^{1}	0.009^{5}	0.009^{6}	0.007^{2}	0.010^{7}	0.007^{3}	0.022^{9}	0.013^{8}	0.009^{4}
	Vício(β)	0.006^{6}	0.008^{7}	0.009^{8}	0.004^{4}	0.010^{9}	0.003^{2}	0.004^{3}	0.003^{1}	0.005^{5}
	EQM(β)	0.014^{1}	0.016^{5}	0.016^{7}	0.014^{2}	0.017^{8}	0.014^{4}	0.032^{9}	0.016^{6}	0.014^{3}
140	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.010^{6}	0.010^{5}	0.011^{7}	0.003^{1}	0.007^{4}	0.005^{2}	0.014^{8}	0.006^{3}	0.026^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.005^{1}	0.007^{5}	0.007^{6}	0.005^{2}	0.008^{7}	0.006^{3}	0.018^{9}	0.011^{8}	0.007^{4}
	Vício(β)	0.004^{6}	0.005^{7}	0.006^{8}	0.002^{2}	0.007^{9}	0.002^{1}	0.003^{4}	0.003^{3}	0.004^{5}
	EQM(β)	0.011^{1}	0.012^{5}	0.013^{6}	0.011^{2}	0.013^{8}	0.011^{3}	0.025^{9}	0.013^{7}	0.011^{4}
170	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.008^{5}	0.008^{4}	0.009^{7}	0.002^{1}	0.006^{3}	0.004^{2}	0.015^{8}	0.008^{6}	0.026^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.004^{1}	0.006^{5}	0.006^{6}	0.004^{2}	0.006^{7}	0.005^{3}	0.015^{9}	0.009^{8}	0.006^{4}
	Vício(β)	0.003^{3}	0.004^{6}	0.005^{7}	0.002^{2}	0.006^{9}	0.002^{1}	0.006^{8}	0.004^{5}	0.004^{4}
	EQM(β)	0.009^{1}	0.010^{5}	0.010^{6}	0.009^{2}	0.010^{7}	0.009^{3}	0.021^{9}	0.011^{8}	0.010^{4}
200	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.007^{6}	0.006^{4}	0.007^{5}	0.001^{1}	0.004^{3}	0.004^{2}	0.016^{8}	0.009^{7}	0.024^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.003^{1}	0.005^{4}	0.005^{6}	0.004^{2}	0.005^{7}	0.004^{3}	0.013^{9}	0.008^{8}	0.005^{5}
	Vício(β)	0.002^{3}	0.003^{4}	0.004^{6}	0.001^{2}	0.004^{8}	0.001^{1}	0.008^{9}	0.004^{7}	0.003^{5}
	EQM(β)	0.007^{1}	0.008^{5}	0.008^{6}	0.007^{2}	0.009^{7}	0.008^{3}	0.018^{9}	0.009^{8}	0.008^{4}
	Total	99^{3}	155^{6}	189^{7}	57^{1}	190^{8}	78^{2}	213^{9}	150^{5}	129^{4}

Tabela 10 – Resultados da simulação para $\alpha = 1.0$ e $\beta = 2.0$

n		EMV	CvM	KS	AD	ADR	ADL	AD2R	AD2L	AD2
20	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.077^{6}	0.081^{7}	0.087^{9}	0.022^{1}	0.056^{4}	0.045^{3}	0.069^{5}	0.085^{8}	0.026^{2}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.050^{3}	0.080^{7}	0.076^{6}	0.044^{2}	0.075^{5}	0.056^{4}	0.147^{9}	0.109^{8}	0.044^{1}
	Vício(β)	0.109^{5}	0.148^{6}	0.154^{7}	0.056^{3}	0.154^{8}	0.059^{4}	1.430^{9}	0.039^{2}	0.019^{1}
	EQM(β)	0.223^{5}	0.468^{8}	0.371^{6}	0.191^{2}	0.442^{7}	0.195^{3}	4849.693^{9}	0.211^{4}	0.163^{1}
50	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.031^{7}	0.030^{6}	0.034^{9}	0.010^{2}	0.023^{5}	0.017^{4}	0.009^{1}	0.016^{3}	0.031^{8}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.016^{1}	0.024^{5}	0.024^{6}	0.016^{2}	0.025^{7}	0.018^{4}	0.047^{9}	0.031^{8}	0.018^{3}
	Vício(β)	0.036^{5}	0.045^{6}	0.049^{7}	0.019^{3}	0.051^{8}	0.019^{4}	0.077^{9}	0.004^{1}	0.008^{2}
	EQM(β)	0.064^{5}	0.081^{6}	0.085^{7}	0.063^{3}	0.097^{8}	0.063^{4}	0.261^{9}	0.061^{2}	0.056^{1}
80	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.019^{6}	0.019^{7}	0.021^{8}	0.006^{3}	0.014^{5}	0.011^{4}	0.006^{2}	0.002^{1}	0.030^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.009^{1}	0.014^{5}	0.014^{6}	0.010^{2}	0.014^{7}	0.011^{3}	0.029^{9}	0.018^{8}	0.011^{4}
	Vício(β)	0.025^{5}	0.030^{7}	0.033^{9}	0.014^{3}	0.033^{8}	0.015^{4}	0.029^{6}	0.004^{1}	0.007^{2}
	EQM(β)	0.037^{3}	0.047^{6}	0.049^{7}	0.037^{5}	0.054^{8}	0.037^{4}	0.132^{9}	0.035^{2}	0.034^{1}
110	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.013^{7}	0.013^{6}	0.014^{8}	0.004^{1}	0.009^{4}	0.007^{3}	0.011^{5}	0.004^{2}	0.029^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.006^{1}	0.010^{5}	0.010^{6}	0.007^{2}	0.010^{7}	0.008^{3}	0.022^{9}	0.014^{8}	0.009^{4}
	Vício(β)	0.015^{6}	0.019^{7}	0.021^{8}	0.008^{3}	0.021^{9}	0.008^{4}	0.007^{2}	0.000^{1}	0.010^{5}
	EQM(β)	0.025^{3}	0.032^{6}	0.033^{7}	0.026^{5}	0.037^{8}	0.026^{4}	0.093^{9}	0.025^{1}	0.025^{2}
140	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.011^{6}	0.010^{5}	0.011^{7}	0.003^{1}	0.007^{4}	0.006^{2}	0.014^{8}	0.006^{3}	0.027^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.005^{1}	0.007^{5}	0.008^{6}	0.005^{2}	0.008^{7}	0.006^{3}	0.018^{9}	0.011^{8}	0.007^{4}
	Vício(β)	0.011^{6}	0.014^{7}	0.016^{9}	0.005^{3}	0.016^{8}	0.005^{4}	0.005^{2}	0.001^{1}	0.011^{5}
	EQM(β)	0.020^{2}	0.024^{6}	0.026^{7}	0.020^{5}	0.029^{8}	0.020^{4}	0.074^{9}	0.019^{1}	0.020^{3}
170	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.008^{6}	0.008^{4}	0.009^{7}	0.002^{1}	0.006^{3}	0.004^{2}	0.015^{8}	0.008^{5}	0.026^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.004^{1}	0.006^{5}	0.006^{6}	0.005^{2}	0.007^{7}	0.005^{3}	0.015^{9}	0.009^{8}	0.006^{4}
	Vício(β)	0.009^{4}	0.011^{7}	0.013^{9}	0.004^{2}	0.013^{8}	0.004^{3}	0.011^{6}	0.000^{1}	0.010^{5}
	EQM(β)	0.016^{2}	0.019^{6}	0.021^{7}	0.017^{5}	0.023^{8}	0.016^{3}	0.061^{9}	0.016^{1}	0.016^{4}
200	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.007^{6}	0.006^{4}	0.007^{5}	0.001^{1}	0.004^{3}	0.004^{2}	0.016^{8}	0.009^{7}	0.024^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.003^{1}	0.005^{4}	0.005^{6}	0.004^{2}	0.005^{7}	0.004^{3}	0.013^{9}	0.008^{8}	0.005^{5}
	Vício(β)	0.007^{4}	0.008^{5}	0.009^{7}	0.003^{2}	0.009^{6}	0.003^{3}	0.015^{9}	0.001^{1}	0.010^{8}
	EQM(β)	0.013^{1}	0.016^{6}	0.017^{7}	0.014^{5}	0.019^{8}	0.013^{3}	0.053^{9}	0.013^{2}	0.014^{4}
	Total	109^{4}	164^{6}	199^{8}	73^{1}	185^{7}	94^{2}	206^{9}	106^{3}	124^{5}

Tabela 11 – Resultados da simulação para $\alpha = 1.2$ e $\beta = 0.5$

n		EMV	CvM	KS	AD	ADR	ADL	AD2R	AD2L	AD2
20	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.074^{6}	0.077^{7}	0.083^{9}	0.019^{1}	0.052^{4}	0.042^{3}	0.060^{5}	0.078^{8}	0.034^{2}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.052^{3}	0.080^{7}	0.077^{5}	0.047^{1}	0.078^{6}	0.058^{4}	0.169^{9}	0.110^{8}	0.050^{2}
	Vício(β)	0.011^{6}	0.007^{3}	0.009^{4}	0.010^{5}	0.005^{2}	0.000^{1}	0.018^{8}	0.012^{7}	0.036^{9}
	EQM(β)	0.018^{1}	0.021^{4}	0.021^{5}	0.018^{2}	0.020^{3}	0.021^{6}	0.024^{8}	0.030^{9}	0.022^{7}
50	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.030^{7}	0.029^{6}	0.033^{8}	0.009^{2}	0.022^{5}	0.016^{4}	0.002^{1}	0.012^{3}	0.037^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.017^{1}	0.025^{5}	0.026^{6}	0.018^{2}	0.027^{7}	0.020^{3}	0.056^{9}	0.034^{8}	0.021^{4}
	Vício(β)	0.006^{7}	0.003^{4}	0.005^{6}	0.003^{3}	0.001^{2}	0.000^{1}	0.011^{8}	0.004^{5}	0.025^{9}
	EQM(β)	0.007^{1}	0.008^{4}	0.008^{6}	0.007^{2}	0.008^{3}	0.008^{5}	0.009^{7}	0.013^{9}	0.010^{8}
80	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.019^{7}	0.019^{6}	0.020^{8}	0.006^{2}	0.013^{5}	0.011^{3}	0.012^{4}	0.001^{1}	0.035^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.010^{1}	0.014^{5}	0.015^{6}	0.011^{2}	0.016^{7}	0.012^{3}	0.036^{9}	0.021^{8}	0.014^{4}
	Vício(β)	0.003^{6}	0.002^{3}	0.002^{5}	0.002^{4}	0.001^{2}	0.000^{1}	0.010^{8}	0.008^{7}	0.022^{9}
	EQM(β)	0.004^{1}	0.005^{4}	0.005^{5}	0.005^{2}	0.005^{3}	0.005^{6}	0.006^{7}	0.009^{9}	0.007^{8}
110	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.013^{6}	0.012^{5}	0.014^{7}	0.003^{1}	0.009^{4}	0.007^{3}	0.016^{8}	0.007^{2}	0.032^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.007^{1}	0.010^{4}	0.011^{6}	0.008^{2}	0.011^{7}	0.008^{3}	0.028^{9}	0.015^{8}	0.010^{5}
	Vício(β)	0.002^{6}	0.001^{3}	0.002^{5}	0.002^{4}	0.001^{2}	0.000^{1}	0.008^{7}	0.009^{8}	0.019^{9}
	EQM(β)	0.003^{1}	0.004^{4}	0.004^{6}	0.003^{2}	0.004^{3}	0.004^{5}	0.004^{7}	0.007^{9}	0.005^{8}
140	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.010^{6}	0.010^{5}	0.011^{7}	0.003^{1}	0.007^{3}	0.005^{2}	0.018^{8}	0.008^{4}	0.030^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.005^{1}	0.008^{4}	0.008^{5}	0.006^{2}	0.009^{7}	0.007^{3}	0.022^{9}	0.013^{8}	0.008^{6}
	Vício(β)	0.002^{6}	0.001^{4}	0.002^{5}	0.001^{3}	0.000^{2}	0.000^{1}	0.007^{7}	0.009^{8}	0.017^{9}
	EQM(β)	0.003^{1}	0.003^{4}	0.003^{5}	0.003^{2}	0.003^{3}	0.003^{6}	0.003^{7}	0.006^{9}	0.004^{8}
170	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.008^{5}	0.007^{4}	0.009^{6}	0.002^{1}	0.005^{3}	0.004^{2}	0.020^{8}	0.011^{7}	0.029^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.004^{1}	0.006^{4}	0.007^{5}	0.005^{2}	0.007^{7}	0.005^{3}	0.019^{9}	0.011^{8}	0.007^{6}
	Vício(β)	0.002^{6}	0.001^{3}	0.001^{4}	0.001^{5}	0.000^{2}	0.000^{1}	0.007^{7}	0.010^{8}	0.016^{9}
	EQM(β)	0.002^{1}	0.002^{4}	0.002^{6}	0.002^{2}	0.002^{3}	0.002^{5}	0.003^{7}	0.005^{9}	0.003^{8}
200	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.007^{6}	0.006^{4}	0.007^{5}	0.001^{1}	0.004^{3}	0.003^{2}	0.020^{8}	0.011^{7}	0.027^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.004^{1}	0.005^{4}	0.006^{5}	0.004^{2}	0.006^{6}	0.005^{3}	0.016^{9}	0.009^{8}	0.006^{7}
	Vício(β)	0.001^{6}	0.001^{2}	0.001^{4}	0.001^{5}	0.001^{3}	0.000^{1}	0.006^{7}	0.009^{8}	0.015^{9}
	EQM(β)	0.002^{1}	0.002^{4}	0.002^{5}	0.002^{2}	0.002^{3}	0.002^{6}	0.002^{7}	0.004^{9}	0.003^{8}
	Total	102^{3}	120^{5}	159^{6}	65^{1}	110^{4}	87^{2}	207^{8}	202^{7}	208^{9}

Tabela 12 – Resultados da simulação para $\alpha = 1.2$ e $\beta = 1.0$

n		EMV	CvM	KS	AD	ADR	ADL	AD2R	AD2L	AD2
20	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.084^{6}	0.088^{8}	0.095^{9}	0.022^{1}	0.061^{4}	0.047^{3}	0.081^{5}	0.086^{7}	0.033^{2}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.062^{3}	0.099^{7}	0.095^{5}	0.055^{1}	0.097^{6}	0.068^{4}	0.222^{9}	0.125^{8}	0.057^{2}
	Vício(β)	0.003^{1}	0.010^{3}	0.011^{4}	0.015^{5}	0.024^{7}	0.004^{2}	0.087^{9}	0.019^{6}	0.032^{8}
	EQM(β)	0.046^{3}	0.050^{6}	0.052^{7}	0.043^{1}	0.050^{5}	0.047^{4}	1.834^{9}	0.060^{8}	0.044^{2}
50	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.034^{7}	0.033^{6}	0.037^{8}	0.010^{2}	0.025^{5}	0.018^{4}	0.009^{1}	0.015^{3}	0.038^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.020^{1}	0.030^{5}	0.031^{6}	0.021^{2}	0.032^{7}	0.023^{3}	0.066^{9}	0.038^{8}	0.023^{4}
	Vício(β)	0.001^{1}	0.002^{4}	0.002^{5}	0.004^{6}	0.007^{7}	0.001^{2}	0.016^{8}	0.001^{3}	0.020^{9}
	EQM(β)	0.017^{2}	0.018^{4}	0.019^{7}	0.017^{1}	0.018^{3}	0.018^{5}	0.021^{8}	0.024^{9}	0.019^{6}
80	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.021^{6}	0.021^{7}	0.023^{8}	0.006^{2}	0.015^{5}	0.012^{4}	0.008^{3}	0.001^{1}	0.036^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.011^{1}	0.017^{5}	0.018^{6}	0.012^{2}	0.019^{7}	0.014^{3}	0.041^{9}	0.023^{8}	0.015^{4}
	Vício(β)	0.001^{1}	0.002^{3}	0.002^{4}	0.004^{5}	0.006^{7}	0.002^{2}	0.009^{8}	0.005^{6}	0.019^{9}
	EQM(β)	0.010^{2}	0.011^{4}	0.012^{6}	0.010^{1}	0.011^{3}	0.011^{5}	0.012^{7}	0.016^{9}	0.012^{8}
110	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.015^{7}	0.014^{6}	0.015^{8}	0.004^{1}	0.010^{4}	0.007^{3}	0.014^{5}	0.006^{2}	0.034^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.008^{1}	0.012^{5}	0.013^{6}	0.009^{2}	0.013^{7}	0.010^{3}	0.031^{9}	0.017^{8}	0.012^{4}
	Vício(β)	0.000^{1}	0.001^{3}	0.001^{4}	0.002^{5}	0.003^{6}	0.000^{2}	0.004^{7}	0.006^{8}	0.016^{9}
	EQM(β)	0.008^{1}	0.008^{4}	0.008^{6}	0.008^{2}	0.008^{3}	0.008^{5}	0.009^{7}	0.012^{9}	0.009^{8}
140	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.012^{6}	0.011^{5}	0.012^{7}	0.003^{1}	0.008^{4}	0.006^{2}	0.017^{8}	0.008^{3}	0.031^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.006^{1}	0.009^{4}	0.010^{6}	0.007^{2}	0.010^{7}	0.008^{3}	0.025^{9}	0.014^{8}	0.009^{5}
	Vício(β)	0.001^{4}	0.000^{2}	0.000^{3}	0.001^{5}	0.002^{7}	0.000^{1}	0.001^{6}	0.007^{8}	0.014^{9}
	EQM(β)	0.006^{1}	0.006^{4}	0.006^{6}	0.006^{2}	0.006^{3}	0.006^{5}	0.007^{7}	0.010^{9}	0.007^{8}
170	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.009^{5}	0.008^{4}	0.010^{6}	0.002^{1}	0.006^{3}	0.004^{2}	0.018^{8}	0.010^{7}	0.030^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.005^{1}	0.008^{4}	0.008^{6}	0.006^{2}	0.009^{7}	0.006^{3}	0.021^{9}	0.012^{8}	0.008^{5}
	Vício(β)	0.000^{3}	0.001^{4}	0.001^{5}	0.001^{6}	0.002^{7}	0.000^{1}	0.000^{2}	0.008^{8}	0.013^{9}
	EQM(β)	0.005^{1}	0.005^{4}	0.005^{6}	0.005^{2}	0.005^{3}	0.005^{5}	0.006^{7}	0.008^{9}	0.006^{8}
200	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.008^{6}	0.007^{4}	0.007^{5}	0.001^{1}	0.004^{3}	0.004^{2}	0.019^{8}	0.011^{7}	0.028^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.004^{1}	0.006^{4}	0.007^{5}	0.005^{2}	0.007^{7}	0.005^{3}	0.018^{9}	0.010^{8}	0.007^{6}
	Vício(β)	0.001^{4}	0.000^{1}	0.000^{2}	0.001^{6}	0.002^{7}	0.000^{3}	0.001^{5}	0.008^{8}	0.012^{9}
	EQM(β)	0.004^{1}	0.004^{4}	0.004^{5}	0.004^{2}	0.004^{3}	0.004^{6}	0.005^{7}	0.007^{9}	0.005^{8}
	Total	78^{2}	124^{4}	161^{6}	71^{1}	147^{5}	90^{3}	198^{9}	195^{7}	196^{8}

Tabela 13 – Resultados da simulação para $\alpha = 1.2$ e $\beta = 1.5$

n		EMV	CvM	KS	AD	ADR	ADL	AD2R	AD2L	AD2
20	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.090^{6}	0.094^{7}	0.101^{9}	0.025^{1}	0.066^{4}	0.052^{3}	0.085^{5}	0.096^{8}	0.032^{2}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.069^{3}	0.111^{7}	0.105^{5}	0.060^{1}	0.106^{6}	0.076^{4}	0.229^{9}	0.145^{8}	0.061^{2}
	Vício(β)	0.044^{5}	0.061^{6}	0.065^{7}	0.030^{4}	0.073^{8}	0.023^{2}	1.509^{9}	0.004^{1}	0.024^{3}
	EQM(β)	0.100^{4}	0.139^{7}	0.134^{6}	0.090^{2}	0.149^{8}	0.093^{3}	7290.874^{9}	0.102^{5}	0.081^{1}
50	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.036^{7}	0.035^{6}	0.039^{9}	0.011^{2}	0.027^{5}	0.019^{4}	0.011^{1}	0.018^{3}	0.038^{8}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.022^{1}	0.033^{5}	0.034^{6}	0.023^{2}	0.035^{7}	0.025^{4}	0.069^{9}	0.042^{8}	0.025^{3}
	Vício(β)	0.014^{5}	0.018^{6}	0.020^{7}	0.009^{4}	0.024^{8}	0.007^{2}	0.039^{9}	0.002^{1}	0.008^{3}
	EQM(β)	0.033^{3}	0.037^{6}	0.039^{7}	0.032^{2}	0.041^{8}	0.033^{4}	0.083^{9}	0.036^{5}	0.031^{1}
80	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.022^{6}	0.023^{7}	0.025^{8}	0.007^{3}	0.016^{5}	0.013^{4}	0.007^{2}	0.002^{1}	0.036^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.012^{1}	0.019^{5}	0.019^{6}	0.013^{2}	0.020^{7}	0.015^{3}	0.043^{9}	0.025^{8}	0.016^{4}
	Vício(β)	0.010^{5}	0.013^{6}	0.014^{7}	0.008^{3}	0.016^{9}	0.006^{2}	0.015^{8}	0.003^{1}	0.008^{4}
	EQM(β)	0.020^{3}	0.022^{5}	0.023^{7}	0.020^{1}	0.024^{8}	0.020^{4}	0.045^{9}	0.023^{6}	0.020^{2}
110	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.016^{7}	0.015^{6}	0.017^{8}	0.004^{1}	0.011^{4}	0.008^{3}	0.013^{5}	0.005^{2}	0.034^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.009^{1}	0.013^{5}	0.014^{6}	0.010^{2}	0.014^{7}	0.011^{3}	0.032^{9}	0.019^{8}	0.012^{4}
	Vício(β)	0.006^{6}	0.008^{7}	0.009^{8}	0.004^{4}	0.010^{9}	0.003^{2}	0.004^{3}	0.003^{1}	0.005^{5}
	EQM(β)	0.014^{1}	0.016^{5}	0.016^{7}	0.014^{2}	0.017^{8}	0.014^{4}	0.032^{9}	0.016^{6}	0.014^{3}
140	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.012^{6}	0.012^{5}	0.013^{7}	0.003^{1}	0.009^{4}	0.006^{2}	0.016^{8}	0.007^{3}	0.032^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.007^{1}	0.010^{5}	0.010^{6}	0.008^{2}	0.011^{7}	0.008^{3}	0.026^{9}	0.015^{8}	0.010^{4}
	Vício(β)	0.004^{6}	0.005^{7}	0.006^{8}	0.002^{2}	0.007^{9}	0.002^{1}	0.003^{4}	0.003^{3}	0.004^{5}
	EQM(β)	0.011^{1}	0.012^{5}	0.013^{6}	0.011^{2}	0.013^{8}	0.011^{3}	0.025^{9}	0.013^{7}	0.011^{4}
170	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.010^{5}	0.009^{4}	0.010^{7}	0.002^{1}	0.007^{3}	0.005^{2}	0.018^{8}	0.010^{6}	0.031^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.005^{1}	0.008^{5}	0.009^{6}	0.006^{2}	0.009^{7}	0.007^{3}	0.022^{9}	0.013^{8}	0.008^{4}
	Vício(β)	0.003^{3}	0.004^{6}	0.006^{7}	0.002^{2}	0.006^{9}	0.002^{1}	0.006^{8}	0.004^{5}	0.004^{4}
	EQM(β)	0.009^{1}	0.010^{5}	0.010^{6}	0.009^{2}	0.010^{7}	0.009^{3}	0.021^{9}	0.011^{8}	0.010^{4}
200	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.008^{6}	0.007^{4}	0.008^{5}	0.002^{1}	0.005^{3}	0.004^{2}	0.019^{8}	0.010^{7}	0.029^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.005^{1}	0.007^{4}	0.007^{6}	0.005^{2}	0.008^{7}	0.006^{3}	0.019^{9}	0.011^{8}	0.007^{5}
	Vício(β)	0.002^{3}	0.003^{4}	0.004^{6}	0.001^{2}	0.004^{8}	0.001^{1}	0.008^{9}	0.004^{7}	0.003^{5}
	EQM(β)	0.007^{1}	0.008^{5}	0.008^{6}	0.007^{2}	0.009^{7}	0.008^{3}	0.018^{9}	0.009^{8}	0.008^{4}
	Total	99^{3}	155^{6}	189^{7}	57^{1}	190^{8}	78^{2}	213^{9}	150^{5}	129^{4}

Tabela 14 – Resultados da simulação para $\alpha = 1.2$ e $\beta = 2.0$

n		EMV	CvM	KS	AD	ADR	ADL	AD2R	AD2L	AD2
20	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.093^{6}	0.097^{7}	0.104^{9}	0.026^{1}	0.067^{4}	0.054^{3}	0.085^{5}	0.102^{8}	0.031^{2}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.072^{3}	0.115^{7}	0.109^{6}	0.063^{2}	0.108^{5}	0.080^{4}	0.226^{9}	0.157^{8}	0.063^{1}
	Vício(β)	0.109^{5}	0.148^{6}	0.154^{7}	0.056^{3}	0.154^{8}	0.059^{4}	22.540^{9}	0.039^{2}	0.019^{1}
	EQM(β)	0.223^{5}	0.468^{8}	0.370^{6}	0.191^{2}	0.442^{7}	0.195^{3}	2233050.538^{9}	0.211^{4}	0.163^{1}
50	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.037^{7}	0.037^{6}	0.041^{9}	0.012^{2}	0.028^{5}	0.020^{4}	0.010^{1}	0.019^{3}	0.037^{8}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.023^{1}	0.034^{5}	0.035^{6}	0.023^{2}	0.035^{7}	0.027^{4}	0.068^{9}	0.044^{8}	0.025^{3}
	Vício(β)	0.036^{5}	0.045^{6}	0.049^{7}	0.019^{3}	0.051^{8}	0.019^{4}	0.077^{9}	0.004^{1}	0.008^{2}
	EQM(β)	0.064^{5}	0.081^{6}	0.085^{7}	0.063^{3}	0.097^{8}	0.063^{4}	0.261^{9}	0.061^{2}	0.056^{1}
80	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.023^{6}	0.023^{7}	0.025^{8}	0.007^{3}	0.016^{5}	0.013^{4}	0.007^{2}	0.003^{1}	0.036^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.013^{1}	0.020^{5}	0.020^{6}	0.014^{2}	0.021^{7}	0.016^{3}	0.043^{9}	0.026^{8}	0.016^{4}
	Vício(β)	0.025^{5}	0.030^{7}	0.033^{9}	0.014^{3}	0.033^{8}	0.015^{4}	0.029^{6}	0.004^{1}	0.007^{2}
	EQM(β)	0.037^{3}	0.047^{6}	0.049^{7}	0.037^{5}	0.054^{8}	0.037^{4}	0.132^{9}	0.035^{2}	0.034^{1}
110	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.016^{7}	0.015^{6}	0.017^{8}	0.004^{1}	0.011^{4}	0.008^{3}	0.013^{5}	0.004^{2}	0.034^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.009^{1}	0.014^{5}	0.014^{6}	0.010^{2}	0.015^{7}	0.011^{3}	0.032^{9}	0.019^{8}	0.013^{4}
	Vício(β)	0.015^{6}	0.019^{7}	0.021^{8}	0.008^{3}	0.021^{9}	0.008^{4}	0.007^{2}	0.000^{1}	0.010^{5}
	EQM(β)	0.025^{3}	0.032^{6}	0.034^{7}	0.026^{5}	0.037^{8}	0.026^{4}	0.093^{9}	0.025^{1}	0.025^{2}
140	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.013^{6}	0.012^{5}	0.014^{7}	0.003^{1}	0.009^{4}	0.007^{2}	0.016^{8}	0.007^{3}	0.032^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.007^{1}	0.010^{5}	0.011^{6}	0.008^{2}	0.011^{7}	0.009^{3}	0.026^{9}	0.016^{8}	0.010^{4}
	Vício(β)	0.011^{6}	0.014^{7}	0.016^{9}	0.005^{3}	0.016^{8}	0.005^{4}	0.005^{2}	0.001^{1}	0.011^{5}
	EQM(β)	0.020^{2}	0.024^{6}	0.026^{7}	0.020^{5}	0.029^{8}	0.020^{4}	0.074^{9}	0.019^{1}	0.020^{3}
170	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.010^{6}	0.009^{4}	0.011^{7}	0.002^{1}	0.007^{3}	0.005^{2}	0.018^{8}	0.010^{5}	0.031^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.006^{1}	0.009^{5}	0.009^{6}	0.006^{2}	0.009^{7}	0.007^{3}	0.022^{9}	0.013^{8}	0.009^{4}
	Vício(β)	0.009^{4}	0.011^{7}	0.013^{9}	0.004^{2}	0.013^{8}	0.004^{3}	0.011^{6}	0.000^{1}	0.010^{5}
	EQM(β)	0.016^{2}	0.019^{6}	0.021^{7}	0.017^{5}	0.023^{8}	0.016^{3}	0.061^{9}	0.016^{1}	0.016^{4}
200	Vício($\widehat{\alpha}$)	0.008^{6}	0.007^{4}	0.008^{5}	0.002^{1}	0.005^{3}	0.004^{2}	0.019^{8}	0.010^{7}	0.029^{9}
	EQM($\widehat{\alpha}$)	0.005^{1}	0.007^{4}	0.007^{6}	0.006^{2}	0.008^{7}	0.006^{3}	0.019^{9}	0.012^{8}	0.007^{5}
	Vício(β)	0.007^{4}	0.008^{5}	0.009^{7}	0.003^{2}	0.009^{6}	0.003^{3}	0.015^{9}	0.001^{1}	0.010^{8}
	EQM(β)	0.013^{1}	0.016^{6}	0.017^{7}	0.014^{5}	0.019^{8}	0.013^{3}	0.053^{9}	0.013^{2}	0.014^{4}
	Total	109^{4}	164^{6}	199^{8}	73^{1}	185^{7}	94^{2}	206^{9}	106^{3}	124^{5}

Conforme pode-se observar pelos resultados apresentados nas tabelas anteriores, o melhor método de estimação para a distribuição Lindley inversa potência em termos de vício e erro quadrático médio, independente dos valores tomados para os parâmetros, é o método de Anderson-Darling, pois na soma $Total$ obteve o melhor $rank$. Na sequência temos o método da máxima verossimilhança e a variação ADL, que na maioria dos cenários considerados aparecem nas posições 2 ou 3 dos $ranks$.

Além disso, é possível observar que ao tomarmos diferentes valores para o parâmetro α, não há alteração nos $ranks$ dos métodos de estimação. A troca de posições entre os métodos acontece apenas quando variamos o parâmetro β, dessa forma, temos que os valores do vício e erro quadrático médio sofrem influencia apenas do parâmetro β.

3.4 Aplicação em Dados Reais

Nesta Seção serão apresentados os ajustes obtidos pelos métodos de estimação considerados anteriormente aplicados a dois conjuntos de dados reais da literatura.

O primeiro conjunto de dados a ser estudado foi utilizado por Nadarajah, Bakouch e Tahmasbi (2011) em seu trabalho sobre a distribuição Lindley generalizada de dois parâmetros. Os dados são referentes a um estudo sobre os tempos de alívio da dor de 20 pacientes que receberam um analgésico.

Tabela 15 – Conjunto de dados 1.

1.1	1.4	1.3	1.7	1.9	1.8	1.6	2.2	1.7	2.7
4.1	1.8	1.5	1.2	1.4	3.0	1.7	2.3	1.6	2.0

O segundo conjunto de dados a ser estudado foi utilizado por Mahmoud e Mandouh (2013) em seu trabalho sobre a distribuição Fréchet transmutada de três parâmetros. Os dados são referentes a tempos de simulação da força de fibras de vidro.

Tabela 16 – Conjunto de dados 2.

1.014	1.081	1.082	1.185	1.223	1.248	1.267	1.271	1.272
1.275	1.276	1.278	1.286	1.288	1.292	1.304	1.306	1.355
1.361	1.364	1.379	1.409	1.426	1.459	1.460	1.476	1.481
1.484	1.501	1.506	1.524	1.526	1.535	1.541	1.568	1.579
1.581	1.591	1.593	1.602	1.666	1.670	1.684	1.691	1.704
1.731	1.735	1.747	1.748	1.757	1.800	1.806	1.867	1.876
1.878	1.910	1.916	1.972	2.012	2.456	2.592	3.197	4.121

Para realizar a comparação dos métodos de estimação consideramos os valores de $-\log L$, o critério de informação de Akaike (AIC) e o critério de informação Bayesiana (BIC). Os valores obtidos estão apresentados nas tabelas a seguir:

Tabela 17 – Resumo dos ajustes — dados 1.

Método	Estimativas	$-\log L$	AIC	BIC
EMV	$\widehat{\alpha} = 3.9812$	15.4132	34.8263	36.8178
	$\widehat{\beta} = 6.7190$			
CvM	$\widehat{\alpha} = 4.2344$	15.5132	35.0264	37.0178
	$\widehat{\beta} = 7.6697$			
KS	$\widehat{\alpha} = 4.5445$	15.9100	35.8200	37.8114
	$\widehat{\beta} = 9.0261$			
AD	$\widehat{\alpha} = 3.9518$	15.4141	34.8282	36.8197
	$\widehat{\beta} = 6.6767$			
ADR	$\widehat{\alpha} = 4.0640$	15.4263	34.8527	36.8442
	$\widehat{\beta} = 7.0508$			
ADL	$\widehat{\alpha} = 3.8497$	15.4309	34.8617	36.8532
	$\widehat{\beta} = 6.4498$			
AD2R	$\widehat{\alpha} = 3.8254$	15.4548	34.9097	36.9012
	$\widehat{\beta} = 6.1679$			
AD2L	$\widehat{\alpha} = 3.5941$	15.5725	35.1450	37.1365
	$\widehat{\beta} = 5.8952$			
AD2	$\widehat{\alpha} = 3.7771$	15.4713	34.9427	36.9341
	$\widehat{\beta} = 6.0858$			

Tabela 18 – Resumo dos ajustes — dados 2.

Método	Estimativas	$-\log L$	AIC	BIC
EMV	$\widehat{\alpha} = 5.3904$	20.1115	44.2229	48.5092
	$\widehat{\beta} = 7.1998$			
CvM	$\widehat{\alpha} = 5.8745$	20.7548	45.5096	49.7958
	$\widehat{\beta} = 8.7244$			
KS	$\widehat{\alpha} = 5.7193$	20.3802	44.7605	49.0467
	$\widehat{\beta} = 8.1423$			
AD	$\widehat{\alpha} = 5.6929$	20.3335	44.6670	48.9532
	$\widehat{\beta} = 8.0483$			
ADR	$\widehat{\alpha} = 6.0375$	21.1967	46.3935	50.6797
	$\widehat{\beta} = 9.2310$			
ADL	$\widehat{\alpha} = 5.4272$	20.1443	44.2887	48.5750
	$\widehat{\beta} = 7.4697$			
AD2R	$\widehat{\alpha} = 4.8084$	21.5171	47.0342	51.3205
	$\widehat{\beta} = 5.4120$			
AD2L	$\widehat{\alpha} = 4.5956$	21.3411	46.6822	50.9685
	$\widehat{\beta} = 5.9461$			
AD2	$\widehat{\alpha} = 4.9072$	20.6403	45.2805	49.5668
	$\widehat{\beta} = 6.0946$			

Além disso, também são apresentadas as estatísticas dos testes de aderência de Kolmogorov-Smirnov (KS), Anderson-Darling (AD) e Cramer-von Mises (CVM), e os seus respectivos p-valores.

Tabela 19 – Resultados dos testes de aderência — dados 1.

Método	KS	p-valor	AD	p-valor	CVM	p-valor
EMV	0.1031	0.9837	0.1560	0.9982	0.0269	0.9874
CvM	0.0929	0.9952	0.1827	0.9946	0.0247	0.9918
KS	0.0810	0.9994	0.2816	0.9508	0.0274	0.9860
AD	0.1006	0.9875	0.1554	0.9983	0.0269	0.9872
ADR	0.0977	0.9910	0.1597	0.9979	0.0255	0.9903
ADL	0.0971	0.9917	0.1592	0.9979	0.0287	0.9827
AD2R	0.1113	0.9653	0.1671	0.9971	0.0311	0.9753
AD2L	0.1091	0.9712	0.2029	0.9898	0.0382	0.9462
AD2	0.1084	0.9727	0.1684	0.9969	0.0314	0.9743

Tabela 20 – Resultados dos testes de aderência — dados 2.

Método	KS	p-valor	AD	p-valor	CVM	p-valor
EMV	0.0780	0.8091	0.5389	0.7069	0.0714	0.7445
CvM	0.0772	0.8194	0.5199	0.7259	0.0550	0.8474
KS	0.0663	0.9276	0.4926	0.7537	0.0574	0.8321
AD	0.0673	0.9195	0.4920	0.7543	0.0583	0.8265
ADR	0.0828	0.7498	0.5618	0.6842	0.0564	0.8381
ADL	0.0808	0.7755	0.5308	0.7150	0.0670	0.7721
AD2R	0.1290	0.2250	1.2233	0.2587	0.2006	0.2668
AD2L	0.1317	0.2059	1.2145	0.2620	0.1967	0.2743
AD2	0.0990	0.5345	0.7995	0.4809	0.1167	0.5104

Conforme pode ser observado, a distribuição Lindley inversa potência se ajustou aos dados independentemente do método de estimação utilizado (p-valor > 0.05). Ao observarmos os valores dos critérios de comparação, verifica-se que o método da máxima verossimilhança foi o que melhor ajustou a distribuição de ambos os conjuntos de dados. O método de Anderson-Darling, para o conjunto de dados 1, foi o segundo melhor método segundo os critérios analisados, e para o conjunto de dados 2, a sua variação ADL aparece como a segunda melhor opção.

A seguir, nas Figuras 3 e 4 são apresentadas as curvas empíricas e teóricas das funções de sobrevivência para os diferentes métodos de estimação, aplicadas aos dois conjuntos de dados considerados.

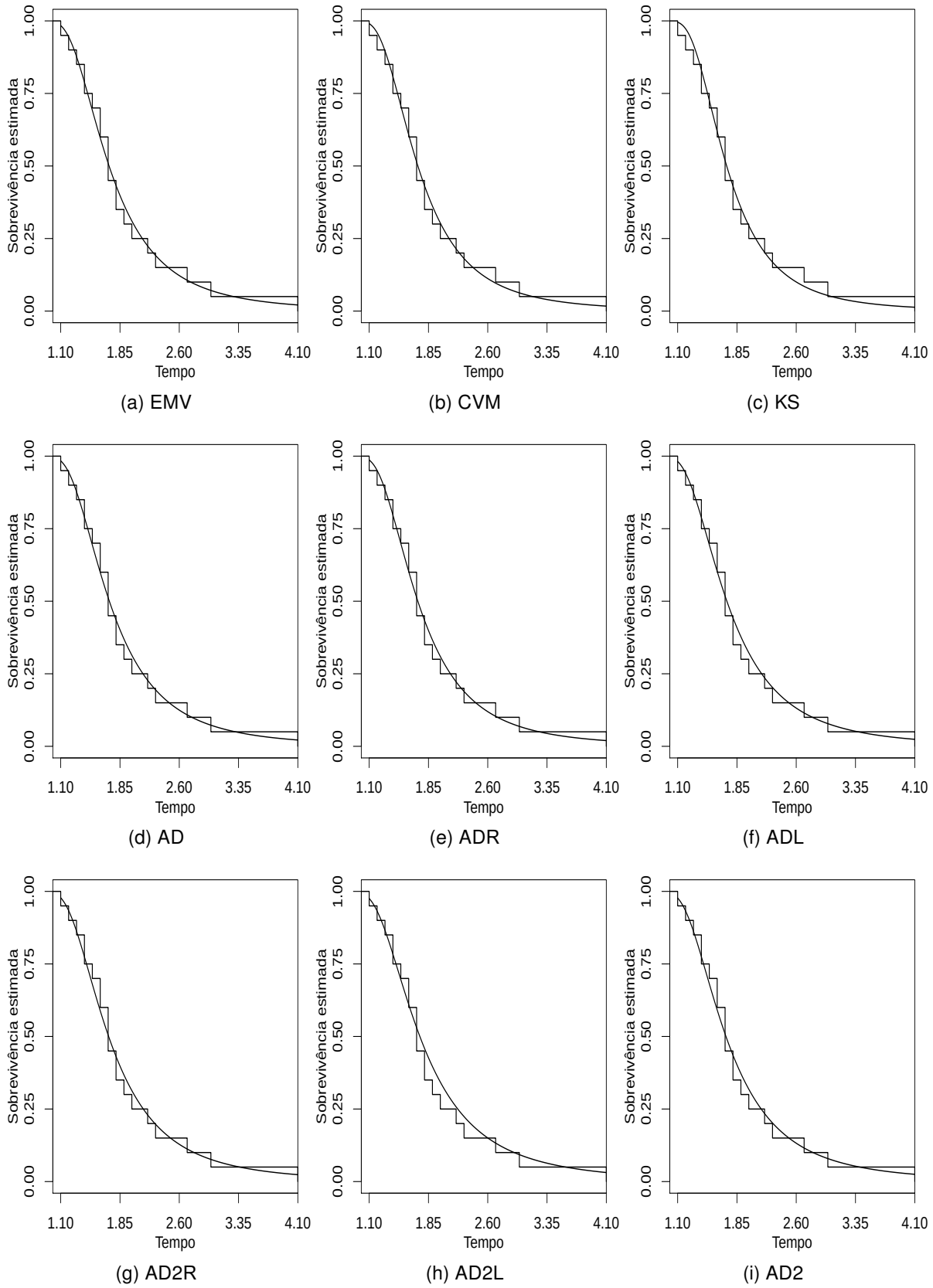


Figura 3 – Ajustes da distribuição Lindley inversa potência com diferentes métodos de estimação — dados 1.

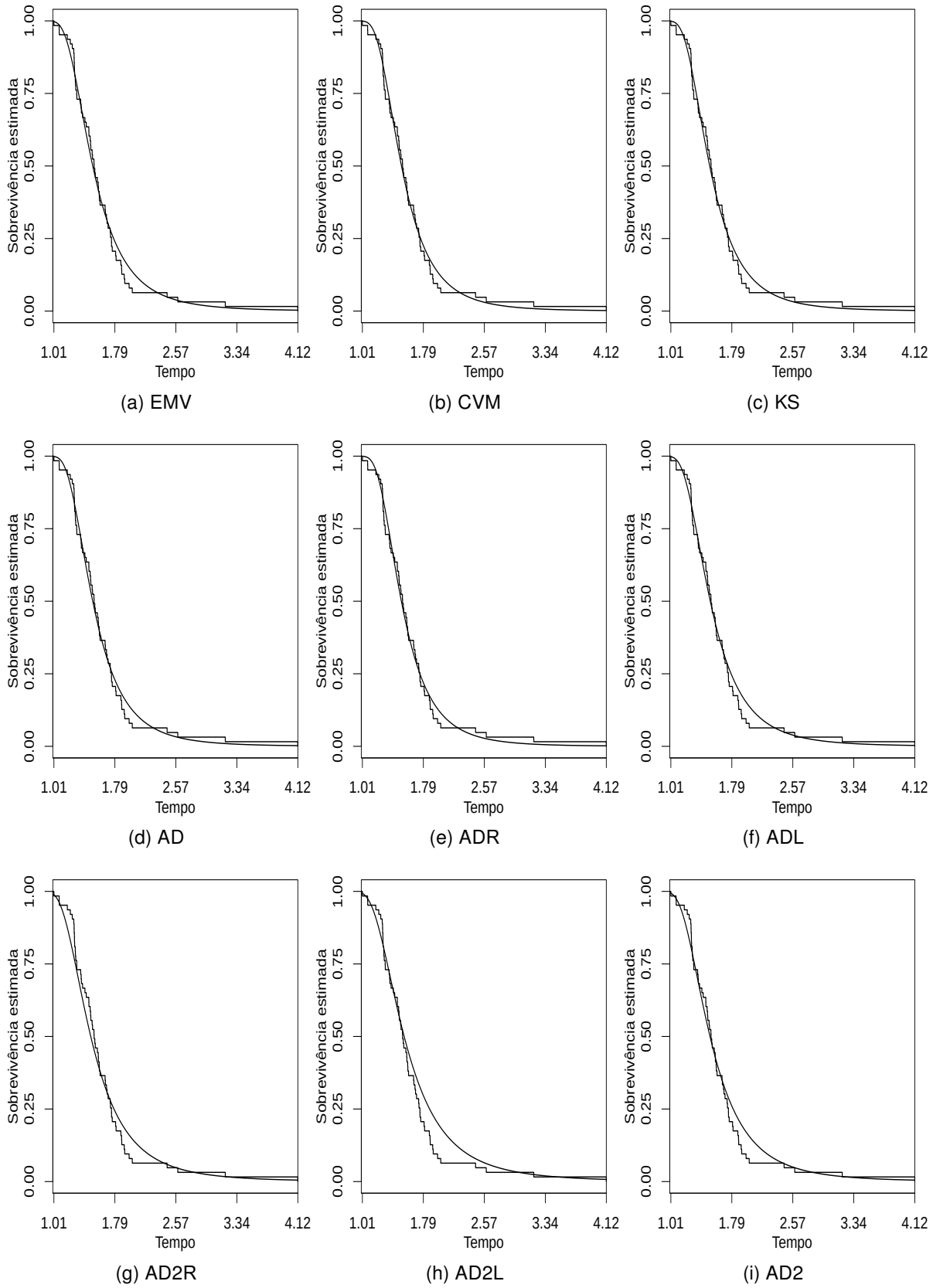


Figura 4 – Ajustes da distribuição Lindley inversa potência com diferentes métodos de estimação — dados 2.

3.5 Conclusão

Neste trabalho comparamos a performance de oito métodos de estimação baseados nas estatísticas usadas na avaliação da qualidade de ajuste, em contrapartida ao método da máxima verossimilhança, e por meio de simulações Monte Carlo verificamos que o método de Anderson-Darling, ao ser utilizado na estimação dos parâmetros da distribuição Lindley inversa potência, gerou os menores valores para vício e erro quadrático médio, de forma geral, seguido pelos métodos da máxima verossimilhança e da sua variação ADL.

Ao ser aplicado em dois conjuntos de dados reais, os critérios de comparação apontaram o método da máxima verossimilhança como o que forneceu o melhor ajuste aos dados, seguido pelo método de Anderson-Darling e sua variação ADL. Dessa forma, temos que os métodos de Anderson-Darling e sua variação ADL podem ser uma alternativa na estimação de parâmetros da distribuição Lindley inversa potência, visto sua qualidade de ajuste e os baixoa valores obtidos para vício e erro quadrático médio.

Referências

ASHOUR, S. K.; ELTEHIWY, M. A. Exponentiated power lindley distribution. *Journal of Advanced Research*, v. 6, n. 6, p. 895 – 905, 2015.

BAKOUCH, H. S.; AL-ZAHRANI, B. M.; AL-SHOMRANI, A. A.; MARCHI, V. A. A.; LOUZADA, F. An extended lindley distribution. *Journal of the Korean Statistical Society*, v. 41, n. 1, p. 75 – 85, 2012.

ELBATAL, I.; MEROVCI, F.; ELGARHY, M. A new generalized lindley distribution. *Mathematical Theory and Modeling*, v. 3, n. 13, p. 30 – 47, 2013.

GHITANY, M. E.; AL-MUTAIRI, D. K.; AL-AWADHI, F. A.; AL-BURAIS, M. M. Marshall-olkin extended lindley distribution and its application. *International Journal of Applied Mathematics*, v. 25, n. 5, p. 709 – 721, 2012.

GHITANY, M. E.; AL-MUTAIRI, D. K.; BALAKRISHNAN, N.; AL-ENEZI, L. J. Power lindley distribution and associated inference. *Computational Statistics and Data Analysis*, v. 64, n. 0, p. 20 – 33, 2013.

GHITANY, M. E.; ALQALLAF, A.; AL-MUTAIRI, D. K.; HUSAIN, H. A. A two-parameter weighted lindley distribution and its applications to survival data. *Mathematics and Computers in Simulation*, v. 81, n. 6, p. 1190 – 1201, 2011.

GHITANY, M. E.; ATIEH, B.; NADARAJAH, S. Lindley distribution and its application. *Mathematics and Computers in Simulation*, v. 78, n. 4, p. 493 – 506, 2008.

GRADSHTEYN, I. S.; RYZHIK, I. M. *Tables of Integrals, Series, and Products*. 7. ed. New York: Elsevier Academic Press, 2007.

JODRA, P. Computer generation of random variables with lindley or poisson–lindley distribution via the lambert w function. *Mathematics and Computers in Simulation*, v. 81, n. 4, p. 851 – 859, 2010.

LINDLEY, D. V. Fiducial distributions and bayes' theorem. *Journal of the Royal Statistical Society*, v. 20, n. 1, p. 102 – 107, 1958.

LUCENO, A. Fitting the generalized pareto distribution to data using maximum goodness-of-fit estimators. *Comput. Stat. Data Anal.*, v. 51, n. 2, p. 904–917, 2006.

MAHMOUD, M. R.; MANDOUH, R. M. On the transmuted fréchet distribution. *Journal of Applied Sciences Research*, v. 9, n. 10, p. 5553–5561, 2013.

MEROVCI, F. Transmuted lindley distribution. *International Journal of Open Problems in Computer Science and Mathematics*, v. 6, n. 2, p. 63 – 72, 2013.

MEROVCI, F.; SHARMA, V. K. The beta-lindley distribution: Properties and applications. *Journal of Applied Mathematics*, v. 2014, 2014.

MILLAR, R. B. *Maximum Likelihood Estimation and Inference*. United Kingdom: John Wiley and Sons, 2011.

NADARAJAH, S.; BAKOUCH, H. S.; TAHMASBI, R. A generalized lindley distribution. *Sankhya B*, v. 73, n. 2, p. 331 – 359, 2011.

PAWITAN, Y. *In All Likelihood: Statistical Modelling and Inference Using Lilkelihood*. New York: Oxford Science Publication, 2001.

SHANKER, R.; MISHRA, A. A quasi lindley distribution. *African Journal of Mathematics and Computer Science Research*, v. 6, n. 4, p. 64 – 71, 2013.

SHARMA, V. K.; SINGH, S. K.; SINGH, U.; AGIWAL, V. The inverse lindley distribution: a stress-strength reliability model with application to head and neck cancer data. *Journal of Industrial and Production Engineering*, v. 32, n. 3, p. 162–173, 2015.

SINGH, S. K.; SINGH, U.; SHARMA, V. K. The truncated lindley distribution: Inference and application. *Journal of Statistics Applications and Probability*, v. 3, n. 2, p. 219–228, 2014.

ZAKERZADEH, H.; DOLATI, A. Generalized lindley distribution. *Journal of Mathematical Extension*, v. 3, n. 2, p. 13 – 25, 2009.

Apêndice A

Artigo para publicação

The power inverse Lindley distribution

Kelly Vanessa Parede Barco
Union Faculty of Campo Mourão, PR, Brazil
Josmar Mazucheli
Statistics Department, State University of Maringá, PR, Brazil
Vanderly Janeiro
Statistics Department, State University of Maringá. PR, Brazil

ABSTRACT

Several probability distributions have been proposed in the literature, especially with the aim of obtaining models that are more flexible relative to the behaviors of the density and hazard rate functions. Recently, a new generalization of the Lindley distribution was proposed by Ghitany et al. (2013), called power Lindley distribution. Another generalization was proposed by Sharma et al. (2015), known as inverse Lindley distribution. In this paper, a new distribution is proposed, which is obtained from these two generalizations and named power inverse Lindley distribution. Some properties of this new distribution and study of the behavior of maximum likelihood estimators are presented and discussed. It is also applied considering real data and compared with the fits obtained for already-known distributions. When applied, the power inverse Lindley distribution was found to be a good alternative for modeling survival data.

Key-Words: Lindley distribution, Likelihood, Monte Carlo simulation, Survival analysis.

1. Introduction

The Lindley distribution was introduced by Lindley (1958) in the context of Bayes inference. Its density function is obtained by mixing the exponential distribution, with scale parameter β, and the gamma distribution, with shape parameter 2 and scale parameter β. Thus, its probability density function is given by:

$$f(x \mid \beta) = pf_1(x \mid \beta) + (1-p)f_2(x \mid 2, \beta),$$

where:

$$p = \frac{\beta}{1+\beta}, \quad f_1(x \mid \beta) = \beta e^{-\beta x} \quad \text{and} \quad f_2(x \mid 2, \beta) = \beta^2 x e^{-\beta x},$$

and therefore:

$$f(x \mid \beta) = \frac{\beta^2}{1+\beta}(1+x)e^{-\beta x}, \tag{1}$$

where $x > 0$ and $\beta > 0$.

The cumulative distribution function is given by:

$$F(x \mid \beta) \;=\; 1 - \left(1 + \frac{\beta x}{1+\beta}\right) e^{-\beta x}. \tag{2}$$

Ghitany et al. (2008) studied the properties and applications of this distribution in the context of survival analysis, showing that its mathematical properties are more flexible than those of the exponential distribution.

Since then, many other generalizations of the Lindley distribution have been proposed with the aim of obtaining probability distributions that are more flexible relative to the behaviors of the density and the hazard rate functions.

The inverse Lindley distribution, proposed by Sharma et al. (2015), considers the inverse of a random variable with a Lindley distribution. More specifically, if a random variable Y has a Lindley distribution, then the random variable $X = 1/Y$ follows an inverse Lindley distribution with density and cumulative distribution functions defined, respectively, by:

$$f(x \mid \beta) = \frac{\beta^2}{1+\beta}\left(\frac{1+x}{x^3}\right)e^{-\frac{\beta}{x}}, \tag{3}$$

$$F(x \mid \beta) = \left(1+\frac{\beta}{1+\beta}\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{\beta}{x}}, \tag{4}$$

where $x > 0$ and $\beta > 0$.

Another generalization is the power Lindley distribution, which considers the power of a random variable with a Lindley distribution, proposed by Ghitany et al. (2013). In other words, if a random variable Y has a Lindley distribution, then the random variable $X = Y^{\frac{1}{\alpha}}$ follows a power Lindley distribution.

The power Lindley distribution can be obtained by mixing two distributions, namely the Weibull distribution with shape parameter α and scale parameter β and the generalized gamma distribution with shape parameters 2 and α and scale parameter β. Thus, its probability density function is given by:

$$f(x \mid \alpha, \beta) = pf_1(x \mid \alpha, \beta) + (1-p)f_2(x \mid 2, \alpha, \beta),$$

where:

$$p = \frac{\beta}{1+\beta}, \quad f_1(x \mid, \alpha, \beta) = \alpha\beta x^{\alpha-1}e^{-\beta x^\alpha} \quad \text{and} \quad f_2(x \mid 2, \alpha, \beta) = \alpha\beta^2 x^{2\alpha-1}e^{-\beta x^\alpha},$$

and therefore:

$$f(x \mid \alpha, \beta) = \frac{\alpha\beta^2}{1+\beta}(1+x^\alpha)x^{\alpha-1}e^{-\beta x^\alpha}, \tag{5}$$

where $x > 0$ and $\alpha, \beta > 0$.

The cumulative distribution function is given by:

$$F(x \mid \alpha, \beta) = 1 - \left(1+\frac{\beta x^\alpha}{1+\beta}\right)e^{-\beta x^\alpha}. \tag{6}$$

It can be noticed that the Lindley distribution is a special case of the power Lindley distribution when $\alpha = 1$.

Starting from the inverse Lindley distribution, the power inverse Lindley distribution is introduced in this paper. For that purpose, consider a random variable Y with an inverse Lindley distribution. The random variable $X = Y^{\frac{1}{\alpha}}$ then follows the power inverse Lindley distribution. The probability density function is given by:

$$f(x \mid \alpha, \beta) = \frac{\alpha\beta^2}{1+\beta}\left(\frac{1+x^\alpha}{x^{2\alpha+1}}\right)e^{-\frac{\beta}{x^\alpha}}, \tag{7}$$

where $x > 0$ and $\alpha, \beta > 0$, α being the location parameter and β the scale parameter.

The cumulative distribution and hazard rate functions of the power inverse Lindley distribution are defined, respectively, by:

$$F(x \mid \alpha, \beta) = \left(1 + \frac{\beta}{1+\beta}\frac{1}{x^{\alpha}}\right) e^{-\frac{\beta}{x^{\alpha}}}, \tag{8}$$

$$h(x \mid \alpha, \beta) = \frac{\alpha\beta^2(1+x^{-\alpha})}{x\big[-\beta + x^{\alpha}(1+\beta)(e^{\frac{\beta}{x^{\alpha}}}-1)\big]}. \tag{9}$$

It can be noticed that the inverse Lindley distribution is a special case of the power inverse Lindley distribution when $\alpha = 1$.

The aims of this paper are to introduce and to study some properties of the power inverse Lindley distribution. In Section 2 some properties of the density and hazard rate functions are studied. The moments, quantile function, and maximum likelihood estimation are shown in Sections 3, 4, and 5, respectively. In order to study the bias and the mean squared error of the maximum likelihood estimates, some Monte Carlo experiments were conducted, with results shown in Section 6. Section 7 shows the comparison between the new proposed distribution and some other distributions using a real survival data set.

2. Behaviors of the Density and Hazard Rate Functions

In Figure 1 the behavior of the probability density function of the power inverse Lindley distribution can be observed for different values of α and β, showing that the density function (7) is unimodal in x.

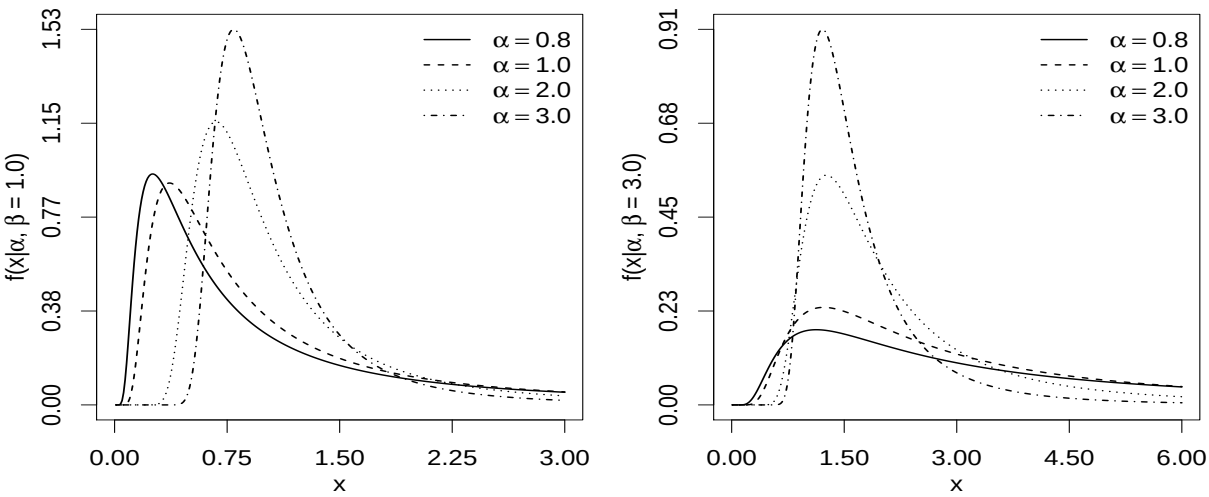


Figure 1: Behavior of the density function of the power inverse Lindley distribution for different values of α and β.

To determine the mode of the density function (7) of the power inverse Lindley distribution, its maximum must be found. Therefore, the point where the first derivative of the density function is null must be determined.

The first derivative of function (7) is given by:

$$\frac{d}{dx} f(x \mid \alpha, \beta) = \frac{\alpha\beta^2}{1+\beta}\frac{e^{-\frac{\beta}{x^{\alpha}}}}{x^{3\alpha+2}}\psi(x^{\alpha}), \tag{10}$$

where:

$$\psi(x^\alpha) = ax^{2\alpha} + bx^\alpha + c, \quad x^\alpha > 0, \tag{11}$$

with:

$$a = -(\alpha + 1), \quad b = \alpha\beta - 2\alpha - 1, \quad c = \alpha\beta.$$

It is clear that $\psi(x^\alpha)$ is a quadratic function and that $\psi(x^\alpha) = 0$ implies $\frac{d}{dx} f(x \mid \alpha, \beta) = 0$. To determine the mode of the density function, it is then necessary to find the roots of function (11).

In this way, as $a < 0$, function (11) is a parabola that opens downwards and thus has a maximum point. $\psi(0) = c$ and $c > 0$, which means the parabola intersects the y-axis only in positive values, therefore guaranteeing that the maximum point given by $x^\alpha = -\frac{b}{2a}$ is always positive and, consequently, that $b > 0$. In addition, two roots of the function can be determined, one being negative and the other one positive. However, as $x > 0$, only the positive root is of interest, being defined by:

$$x^\alpha = \frac{(\alpha\beta - 2\alpha - 1) + \sqrt{(\alpha\beta - 2\alpha - 1)^2 + 4(\alpha + 1)(\alpha\beta)}}{2(\alpha + 1)}. \tag{12}$$

From (12), the value of x^α that zeroes function (11) is obtained. Consequently, the value of x where (10) is null is also obtained, that is, the mode of the density function of the power inverse Lindley distribution.

Concerning the hazard rate function of the power inverse Lindley distribution, which is shown in Figure 2, it notably has the shape of an upside-down bathtub, therefore being unimodal in x.

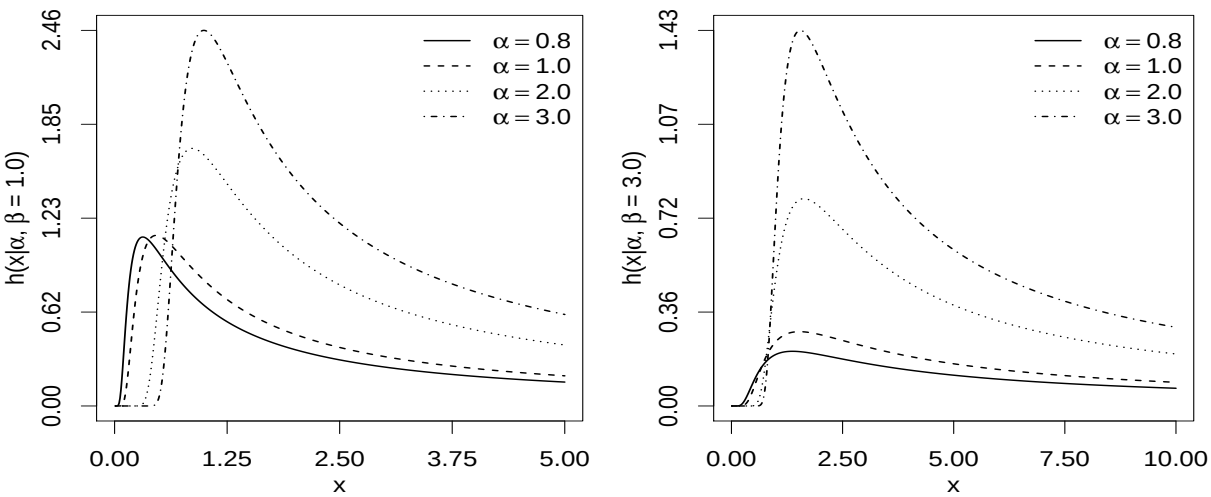


Figure 2: Behavior of the hazard rate function of the power inverse Lindley distribution for different values of α and β.

As is the case for the density function, the mode of the hazard rate function can also be determined by finding its maximum. The first derivative of the function is given by:

$$\frac{d}{dx} h(x \mid \alpha, \beta) = \frac{\alpha\beta^2 x^{-\alpha}}{x^2[-\beta + x^\alpha(1 + \beta)(e^{\frac{\beta}{x^\alpha}} - 1)]^2} \psi(x^\alpha) \tag{13}$$

where:

$$\psi(x^\alpha) = ax^{2\alpha} + bx^\alpha + c, \quad x^\alpha > 0 \tag{14}$$

with:

$$\begin{aligned} a &= (1+\alpha)(1+\beta)(1-e^{\frac{\beta}{x^\alpha}}), \\ b &= 1+2(\alpha+\beta+\alpha\beta)+(1+\beta)(\alpha\beta-2\alpha-1)e^{\frac{\beta}{x^\alpha}}, \\ c &= \beta(\alpha\beta e^{\frac{\beta}{x^\alpha}}+\alpha e^{\frac{\beta}{x^\alpha}}+\alpha+1). \end{aligned}$$

It is important to notice that because $e^{\frac{\beta}{x^\alpha}} > 1$, $\alpha > 0$ and thus function (14) is a parabola that opens downwards, which has a maximum. Besides, $\psi(0) = c$ and $c > 0$, meaning the parabola intersects the y-axis only at positive values. Analogously to what happens in the density function, the positive solution to equation (14) gives the value of x^α of interest and, consequently, the value of x when (13) is null, that is, the mode of the hazard rate function of the power inverse Lindley distribution.

3. Moments

For each positive integer r, the rth raw moment of the power inverse Lindley distribution can be defined as:

$$E(X^r) = \frac{\left(\alpha\beta^{\frac{r}{\alpha}} - r\beta^{\frac{r}{\alpha}} + \alpha\beta^{\frac{r+\alpha}{\alpha}}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha-r}{\alpha}\right)}{\alpha(1+\beta)}. \tag{15}$$

It is worth of note that, for the rth raw moment to exist, the constraint $\alpha > r$ must be satisfied. From (15), the mean and the variance of the power inverse Lindley distribution can be defined, respectively, as:

$$E(X) = \frac{\left(\alpha\beta^{\frac{1}{\alpha}} - \beta^{\frac{1}{\alpha}} + \alpha\beta^{\frac{1+\alpha}{\alpha}}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)}{\alpha(1+\beta)}, \tag{16}$$

$$V(X) = \frac{\left(\alpha\beta^{\frac{2}{\alpha}} - 2\beta^{\frac{2}{\alpha}} + \alpha\beta^{\frac{2+\alpha}{\alpha}}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha-2}{\alpha}\right)\alpha(1+\beta) - \left(\alpha\beta^{\frac{1}{\alpha}} - \beta^{\frac{1}{\alpha}} + \alpha\beta^{\frac{1+\alpha}{\alpha}}\right)^2\left[\Gamma\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)\right]^2}{\alpha^2(1+\beta)^2}. \tag{17}$$

4. Quantile Function

In can be noticed in Figure 3 that the cumulative distribution function (8) is strictly increasing and continuous, so the quantile function can be obtained from the equation $Q(u) = F^{-1}(u)$, where $0 < u < 1$.

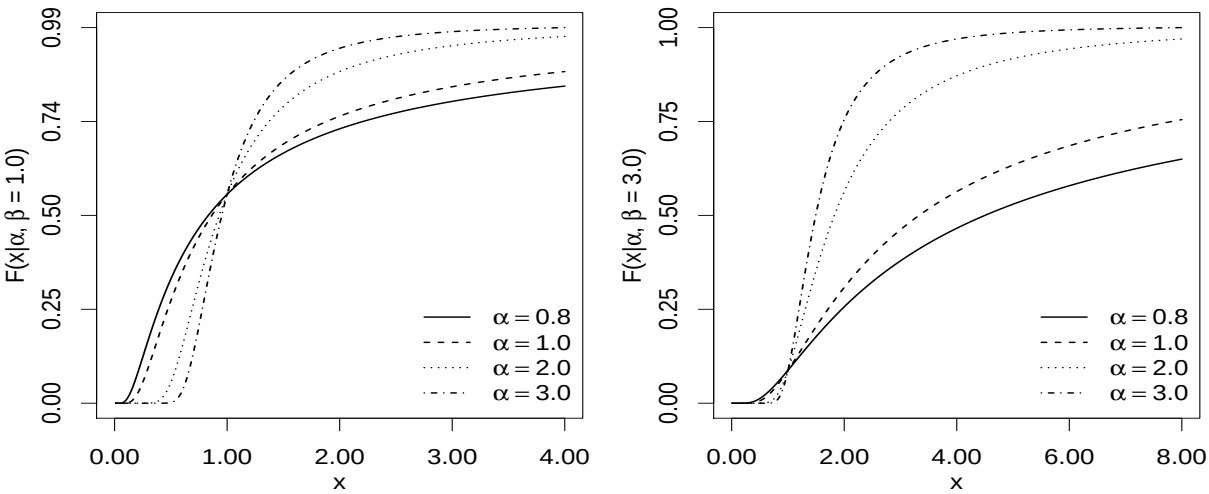


Figure 3: Behavior of the cumulative distribution function of the power inverse Lindley distribution for different values of α and β.

Teorem 4.1. *For any $\alpha, \beta > 0$, the quantile function of the power inverse Lindley distribution is given by:*

$$Q(u) = \left[-1 - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta} W_{-1}\left(-u(1+\beta)e^{-(1+\beta)}\right)\right]^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad 0 < u < 1,$$

where W_{-1} denotes the negative branch of the Lambert W function.

Proof: For any fixed $\alpha, \beta > 0$, let $u \in (1, 0)$. The equation $F(Q(u)) = u$ has to be solved relative to $Q(u)$ for $Q(u) > 0$. Substituting in function (8):

$$\left(1 + \beta + \frac{\beta}{Q(u)^\alpha}\right) e^{-\frac{\beta}{Q(u)^\alpha}} = u(1+\beta). \tag{18}$$

By multiplying both sides of equation (18) by $-e^{-(1+\beta)}$, it becomes:

$$-\left(1 + \beta + \frac{\beta}{Q(u)^\alpha}\right) e^{-(1+\beta+\frac{\beta}{Q(u)^\alpha})} = -u(1+\beta)e^{-(1+\beta)}. \tag{19}$$

To solve equation (19) the Lambert W function, presented by Jodra (2010), must be used. It is a multivalued complex function defined as the solution to the equation $W(z)e^{W(z)} = z$, where z is a complex number.

From equation (19) it can be noticed that $-\left(1 + \beta + \frac{\beta}{Q(u)^\alpha}\right)$ is a Lambert W function of real argument $-u(1+\beta)e^{-(1+\beta)}$. That is:

$$W\left(-u(1+\beta)e^{-(1+\beta)}\right) = -\left(1 + \beta + \frac{\beta}{Q(u)^\alpha}\right). \tag{20}$$

Furthermore, for any $\alpha, \beta > 0$ and $x > 0$, it is immediate that $1 + \beta + \frac{\beta}{Q(u)^\alpha} > 1$ and it can also be verified that $-u(1+\beta)e^{-(1+\beta)} \in (-\frac{1}{e}, 0)$ since $0 < u < 1$. Therefore, by taking into account the properties of the negative branch of the Lambert W function, equation

(20) becomes:

$$W_{-1}\left(-u(1+\beta)e^{-(1+\beta)}\right) = -\left(1+\beta+\frac{\beta}{Q(u)^{\alpha}}\right), \tag{21}$$

which, in turn, implies:

$$Q(u) = \left[-1-\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\beta}W_{-1}\left(-u(1+\beta)e^{-(1+\beta)}\right)\right]^{-\frac{1}{\alpha}}. \tag{22}$$

■

From equation (22), the quartiles of the power inverse Lindley distribution can be determined. To that end, the assumption $u = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ and $\frac{3}{4}$ is made. The quartiles of the power inverse Lindley distribution are then given by:

$$Q\left(\frac{1}{4}\right) = \left[-1-\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\beta}W_{-1}\left(-\frac{1}{4}(1+\beta)e^{-(1+\beta)}\right)\right]^{-\frac{1}{\alpha}},$$

$$Q\left(\frac{1}{2}\right) = \left[-1-\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\beta}W_{-1}\left(-\frac{1}{2}(1+\beta)e^{-(1+\beta)}\right)\right]^{-\frac{1}{\alpha}},$$

$$Q\left(\frac{3}{4}\right) = \left[-1-\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\beta}W_{-1}\left(-\frac{3}{4}(1+\beta)e^{-(1+\beta)}\right)\right]^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

5. Maximum Likelihood Estimation

Let $x_1, ..., x_n$ be a random sample of size n from the power inverse Lindley distribution. The log-likelihood function is then given by:

$$\begin{aligned} l(\alpha,\beta \mid \mathbf{x}) &= n[\log\alpha + 2\log\beta - \log(1+\beta)] + \sum_{i=1}^{n}\log(1+x_i^{\alpha}) \\ &\quad -(2\alpha+1)\sum_{i=1}^{n}\log x_i - \beta\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}. \end{aligned} \tag{23}$$

Thus, the maximum likelihood estimates $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}$ for α, β are the solutions to the non-linear equations:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}l(\alpha,\beta \mid \mathbf{x}) = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{\alpha}\log x_i}{1+x_i^{\alpha}} - 2\sum_{i=1}^{n}\log x_i + \beta\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}\log x_i = 0, \tag{24}$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}l(\alpha,\beta \mid \mathbf{x}) = \frac{n(2+\beta)}{\beta(1+\beta)} - \sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha} = 0. \tag{25}$$

On the other hand, equation (25) can be rewritten as:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}\right)\beta^2 + \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha} - n\right)\beta - 2n = 0,$$

and therefore, the maximum likelihood estimate $\widehat{\beta}$ is the only solution to the equation above, given by:

$$\widehat{\beta}(\widehat{\alpha}) = \frac{-\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\widehat{\alpha}} - n\right) + \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\widehat{\alpha}} - n\right)^2 + 8n\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\widehat{\alpha}}}}{2\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\widehat{\alpha}}}$$

and $\widehat{\alpha}$ is obtained by the solution to the non-linear equation:

$$G(\alpha) = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{\alpha}\log x_i}{1+x_i^{\alpha}} - 2\sum_{i=1}^{n}\log x_i + \widehat{\beta}(\alpha)\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}\log x_i = 0.$$

To determine confidence intervals for the parameters using the maximum likelihood estimates $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}$ the Fisher information matrix was used, which for a vector of parameters $\boldsymbol{\theta}$ and $n = 1$ is given by:

$$I(\boldsymbol{\theta}) = I_{ij}(\boldsymbol{\theta}) = E\left[-\frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\log f(X \mid \boldsymbol{\theta})\right].$$

In practice, it is not always possible to compute the integrals involved in the composition of the Fisher information matrix. In this case, the inverse Hessian matrix is used locally in the maximum likelihood estimates.

For the power inverse Lindley distribution, it is possible to determine the Fisher information matrix. Thus, the second-order derivatives of the log-likelihood function are given by:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}l(\alpha,\beta) &= -\frac{n}{\alpha^2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{\alpha}\log^2 x_i}{(1+x_i^{\alpha})^2} - \beta\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}\log^2 x_i,\\
\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}l(\alpha,\beta) &= -\frac{n(\beta^2+4\beta+2)}{\beta^2(1+\beta)^2},\\
\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}l(\alpha,\beta) &= \sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}\log x_i.
\end{aligned}$$

To obtain the Fisher information matrix it is necessary to determine the expectations of the second-order derivatives obtained above taking $n = 1$, without loss of generality. To that end, some integrals have to be calculated. According to Gradshteyn and Ryzhik (2007),

$$\int_0^{\infty} t^{\nu-1}\log(t)e^{-\beta t}dt = \frac{\Gamma(\nu)}{\beta^{\nu}}[\psi(\nu) - \log\beta], \quad \nu,\beta > 0.$$

Similarly:

$$\int_0^{\infty} t^{\nu-1}(\log(t))^2 e^{-\beta t}dt = \frac{\Gamma(\nu)}{\beta^{\nu}}\left\{[\psi(\nu) - \log\beta]^2 + \zeta(2,\nu)\right\}, \quad \nu,\beta > 0,$$

being $\Gamma(t)$ the gamma function, $\psi(t) = \frac{d}{dt}\log\Gamma(t)$ the digamma function, and $\zeta(z,\nu)$ Riemann's zeta function defined by:

$$\zeta(z,\nu) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(\nu+m)^z}, \quad z > 1, \quad \nu \neq 0,-1,-2,\ldots$$

From these equations, the required expectations can be calculated to compose the Fisher matrix. In this way, let T be a random sample from the power inverse Lindley distribution. The random variable $X = T^{-\frac{1}{\alpha}}$ then follows the power inverse Lindley distribution, so

$$\begin{aligned}
E\left[\frac{X^{\alpha}(\log X)^2}{(1+X^{\alpha})^2}\right] &= E\left[\frac{T^{-1}}{(1+T^{-1})^2}\left(-\frac{\log T}{\alpha}\right)^2\right] \\
&= \frac{\beta^2}{\alpha^2(1+\beta)}\int_0^{\infty}\frac{t^{-1}(1+t)(\log t)^2 e^{-\beta t}}{(1+t^{-1})}dt \\
&= \frac{\beta^2}{\alpha^2(1+\beta)}\int_0^{\infty}\left(1-\frac{1}{1+t}\right)(\log t)^2 e^{-\beta t}dt \\
&= \frac{\beta}{\alpha^2(1+\beta)}\left\{[\psi(1)-\log\beta]^2+\zeta(2,1)-\beta J(\beta)\right\},
\end{aligned}$$

where:

$$J(\beta) = \int_0^{\infty}\frac{(\log t)^2}{1+t}e^{-\beta t}dt.$$

$$\begin{aligned}
E[X^{-\alpha}(\log X)^2] &= E\left[T\left(-\frac{\log T}{\alpha}\right)^2\right] \\
&= \frac{\beta^2}{\alpha^2(1+\beta)}\int_0^{\infty} t(\log t)^2(1+t)e^{-\beta t}dt \\
&= \frac{\beta\left\{[\psi(2)-\log\beta]^2+\zeta(2,2)\right\}+2\left\{[\psi(3)-\log\beta]^2+\zeta(2,3)\right\}}{\alpha^2\beta(1+\beta)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[X^{-\alpha}\log X] &= E\left[-\frac{T\log T}{\alpha}\right] \\
&= -\frac{\beta^2}{\alpha(1+\beta)}\int_0^{\infty} t\log t(1+t)e^{-\beta t}dt \\
&= -\frac{\beta[\psi(2)-\log\beta]+2[\psi(3)-\log\beta]}{\alpha\beta(1+\beta)},
\end{aligned}$$

and thus,

$$
\begin{aligned}
I_{11} &= \frac{1}{\alpha^2} - E\left[\frac{X^\alpha(\log X)^2}{(1+X^\alpha)^2}\right] + \beta E\left[X^\alpha(\log X)^2\right] \\
&= \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2(1+\beta)}\Big\{\beta\left[(\psi(2)-\log\beta)^2+\zeta(2,2)\right] + 2\left[(\psi(3)-\log\beta)^2+\zeta(2,3)\right] \\
&\quad -\beta\left[(\psi(1)-\log\beta)^2+\zeta(2,1)\right] + \beta^2 J(\beta)\Big\}, \\
I_{22} &= \frac{\beta^2+4\beta+2}{\beta^2(1+\beta)^2}, \\
I_{12} &= E[X^{-\alpha}\log X] \\
&= -\frac{\beta[\psi(2)-\log\beta]+2[\psi(3)-\log\beta]}{\alpha\beta(1+\beta)}.
\end{aligned}
$$

To solve these equations the values of the digamma function, locally on 1, 2, and 3, and of Riemann's zeta function, locally on (2,1), (2,2), and (2,3), are necessary and given by:

$\psi(1) = -0.577216, \quad \psi(2) = 0.422784, \quad \psi(3) = 0.922784;$

$\zeta(2,1) = 1.644934, \quad \zeta(2,2) = 0.644934, \quad \zeta(2,3) = 0.394934.$

Under mild regularity conditions, the asymptotic distribution of the maximum likelihood estimator $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ for $\boldsymbol{\theta}$ is given by:

$$\sqrt{n}(\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \to N(0, I^{-1}(\boldsymbol{\theta}))$$

where $I^{-1}(\boldsymbol{\theta})$ is the inverse Fisher information matrix, with:

$$\frac{1}{n}I^{-1}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} Var(\widehat{\alpha}) & Cov(\widehat{\alpha},\widehat{\beta}) \\ Cov(\widehat{\alpha},\widehat{\beta}) & Var(\widehat{\beta}) \end{pmatrix}. \tag{26}$$

The asymptotic $100(1-\delta)\%$ confidence intervals of α and β, respectively, are then given by:

$$\widehat{\alpha} \pm z_{\frac{\delta}{2}}\sqrt{\widehat{Var(\widehat{\alpha})}}, \quad \text{and} \quad \widehat{\beta} \pm z_{\frac{\delta}{2}}\sqrt{\widehat{Var(\widehat{\beta})}}$$

where $\widehat{Var(\widehat{\alpha})}$ and $\widehat{Var(\widehat{\beta})}$ are the elements of the main diagonal of the matrix defined in (26).

6. Simulation Study

This section presents a simulation study with the purpose of verifying the performance of the maximum likelihood estimators of the power inverse Lindley distribution. For this, a simulation algorithm is needed for generating a random sample with density function (7).

By inverting the cumulative distribution function:

$$X_i = \left[-1 - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta}W_{-1}\left(-u_i(1+\beta)e^{-(1+\beta)}\right)\right]^{-\frac{1}{\alpha}}, i = 1, \ldots, n, \tag{27}$$

where u_i are values of a uniform random variable in the interval $(0, 1)$.

$N = 10000$ pseudo-random samples were generated from the power inverse Lindley distribution using equation (27) with sizes $n = 20, 50, 80, 110, 140, 170, 200$ and parameters $(\alpha, \beta) = (0.8, 0.8), (0.8, 1.0), (0.8, 1.5), (0.8, 2.0), (1.0, 0.8), (1.0, 1.0), (1.0, 1.5), (1.0, 2.0), (1.5, 0.8), (1.5, 1.0), (1.5, 1.5), (1.5, 2.0), (2.0, 0.8), (2.0, 1.0), (2.0, 1.5)$, and $(2.0, 2.0)$.

In addition, the parameters estimates were obtained by the maximum likelihood method. The biases and the mean squared errors of $\widehat{\alpha}$ and $\widehat{\beta}$ were also calculated and are given by:

$$\text{Bias}(\widehat{\theta}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(\widehat{\theta}_i - \theta) \quad \text{and} \quad \text{MSE}(\widehat{\theta}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(\widehat{\theta}_i - \theta)^2, \quad \text{with} \quad \theta = \alpha, \beta.$$

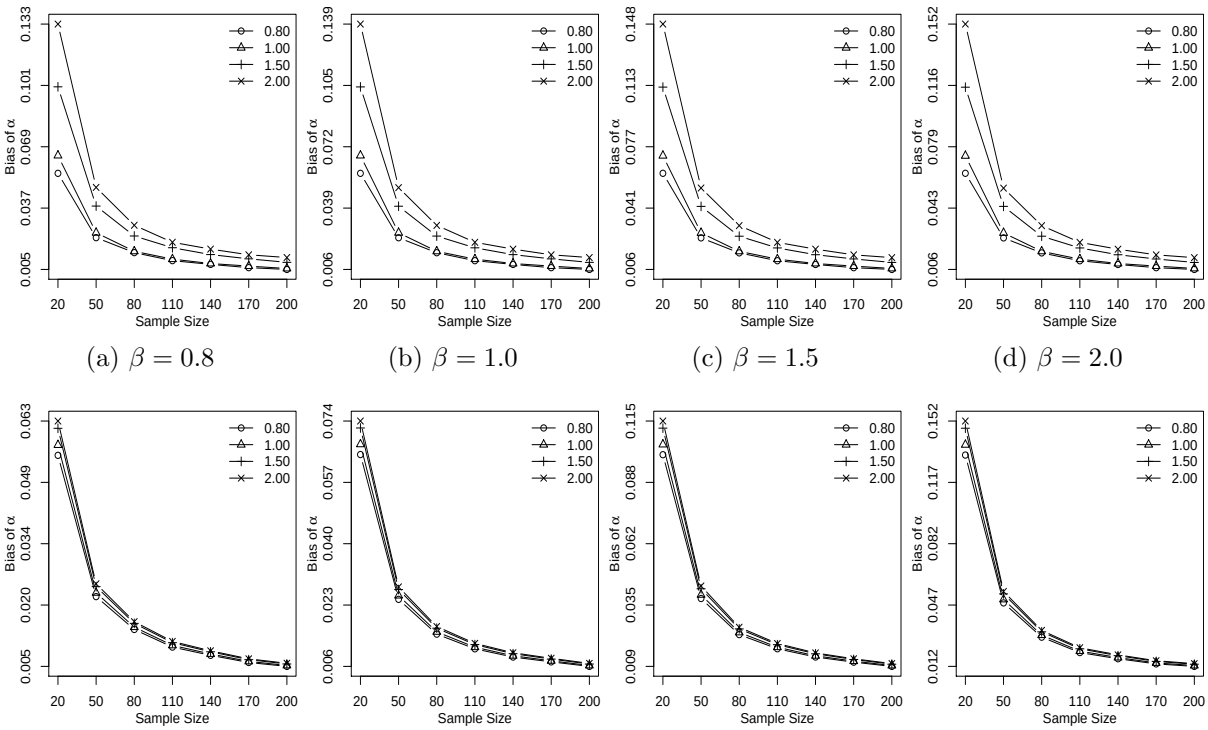
Figures 4 to 7 present the biases and the mean squared errors of $\widehat{\alpha}$ and $\widehat{\beta}$. In general, the biases and the MSEs tend to zero for large values of n, that is, the estimators are asymptotically unbiased.

It is clear in Figure 4 that the bias of $\widehat{\alpha}$ is strictly positive. Moreover, the bias of $\widehat{\alpha}$ increases with increasing α and β. However, the effects of β on the bias of $\widehat{\alpha}$ are very small.

Figure 5 shows that the bias of $\widehat{\beta}$ can be positive or negative. Due to numerical instability for small values of β, the bias of $\widehat{\beta}$ tends to increase with an increase in sample size and presents an irregular behavior. On the other hand, the bias of $\widehat{\beta}$ always increases with increasing β.

As for the mean squared errors, Figure 6 shows that the MSE of $\widehat{\alpha}$ increases with an increase in α or β. However, the effects of β in the MSE of $\widehat{\alpha}$ are very small.

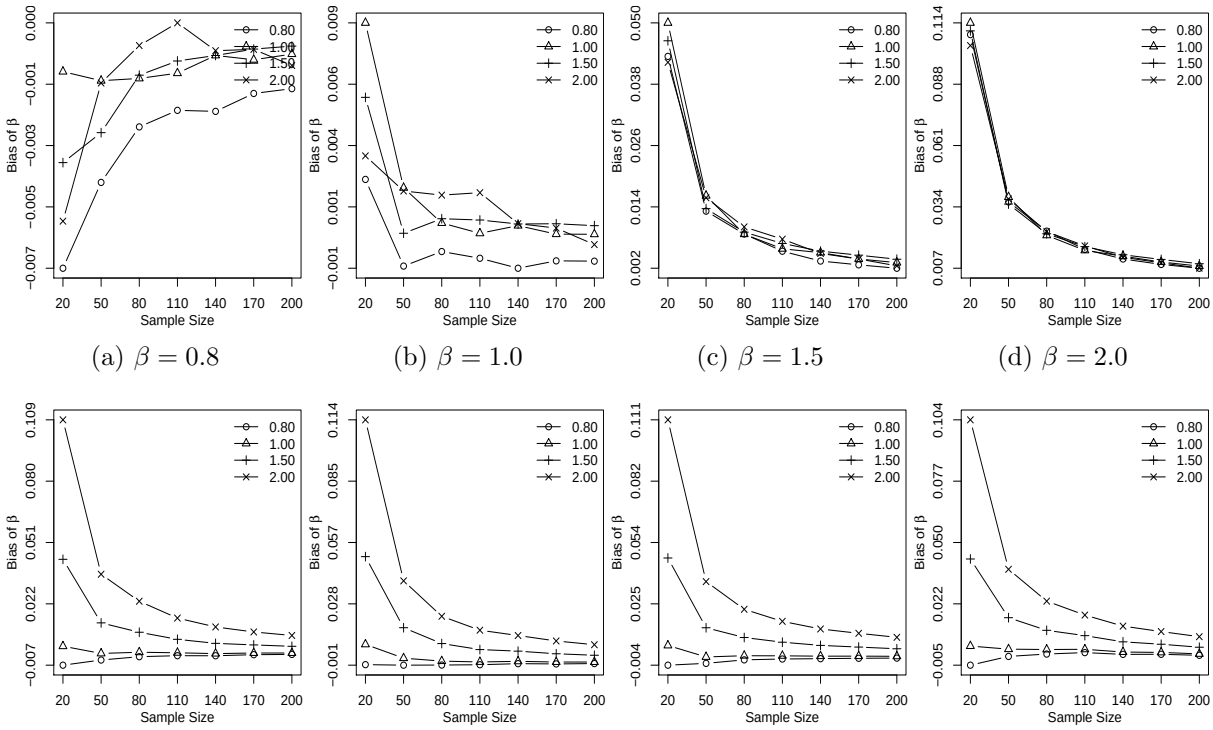
Figure 7 shows that the MSE of $\widehat{\beta}$ increases with an increase in β. However, the effects of α in the MSE of $\widehat{\beta}$ are nearly negligible.



(a) $\beta = 0.8$ (b) $\beta = 1.0$ (c) $\beta = 1.5$ (d) $\beta = 2.0$

(e) $\alpha = 0.8$ (f) $\alpha = 1.0$ (g) $\alpha = 1.5$ (h) $\alpha = 2.0$

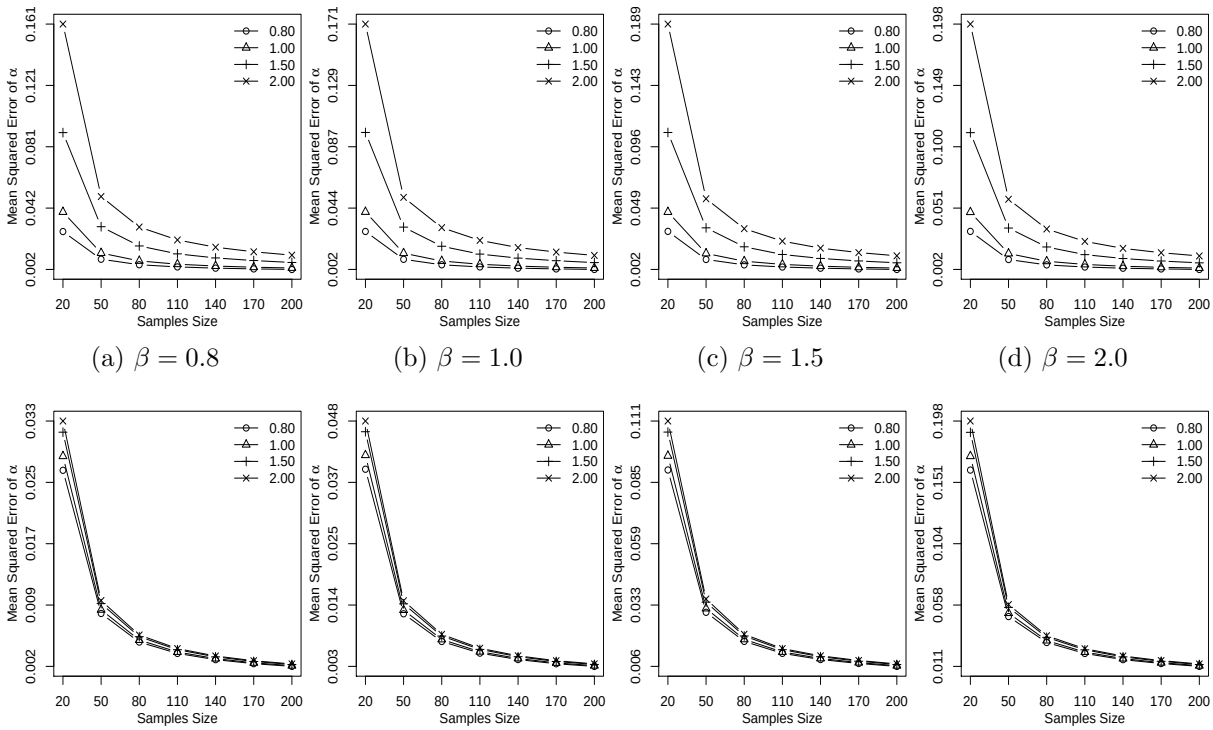
Figure 4: Bias of $\widehat{\alpha}$.



(a) $\beta = 0.8$ (b) $\beta = 1.0$ (c) $\beta = 1.5$ (d) $\beta = 2.0$

(e) $\alpha = 0.8$ (f) $\alpha = 1.0$ (g) $\alpha = 1.5$ (h) $\alpha = 2.0$

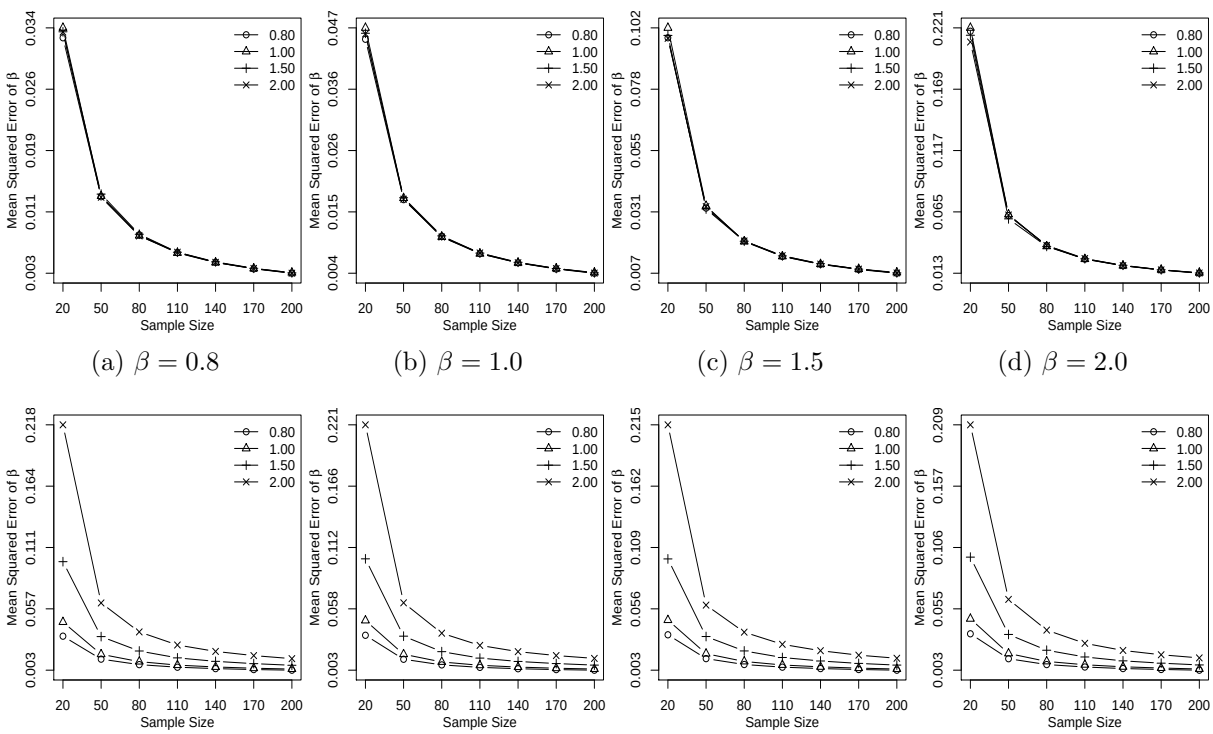
Figure 5: Bias of $\widehat{\beta}$.



(a) $\beta = 0.8$ (b) $\beta = 1.0$ (c) $\beta = 1.5$ (d) $\beta = 2.0$

(e) $\alpha = 0.8$ (f) $\alpha = 1.0$ (g) $\alpha = 1.5$ (h) $\alpha = 2.0$

Figure 6: Mean squared error of $\widehat{\alpha}$.



(a) $\beta = 0.8$ (b) $\beta = 1.0$ (c) $\beta = 1.5$ (d) $\beta = 2.0$

(e) $\alpha = 0.8$ (f) $\alpha = 1.0$ (g) $\alpha = 1.5$ (h) $\alpha = 2.0$

Figure 7: Mean squared error of $\widehat{\beta}$

7. Real Data Application

The power inverse Lindley distribution was applied to two sets of data taken from the literature with the objective of evaluating its fit relative to other distributions already present in the literature.

The maximum likelihood method was used to estimate the parameters. For the comparison of the models, the values of $-\log L$, the Akaike information criterion (AIC), and the Bayesian information criterion (BIC), defined respectively by $-2-\log L+2q$ and $-2-\log L+q\log(n)$, where q is the number of estimated parameters and n is the sample size, were taken into account. The most appropriate model corresponds to that which obtains the lowest values for $-\log L$, AIC, and BIC.

The statistics of the Kolmogorov-Smirnov test (KS), the Anderson-Darling test (AD), and the Cramer-von Mises test (CVM) are also presented, as well as their respective p-values. These tests observe the differences between the assumed cumulative distribution function and the empirical cumulative distribution function from the data to verify the fit of the distributions (p-value>0.05).

The first data set to be studied was used by Nadarajah et al. (2011) in their work on the generalized Lindley distribution using two parameters. The data shows the relief times of twenty patients receiving an analgesic.

Table 1: Data set 1.

1.1	1.4	1.3	1.7	1.9	1.8	1.6	2.2	1.7	2.7
4.1	1.8	1.5	1.2	1.4	3.0	1.7	2.3	1.6	2.0

Thus, the power inverse Lindley distribution (PIL) is compared with the generalized Lindley (GL), the power Lindley (PL), the inverse Lindley (IL), and the Lindley (L) distributions. The values of $-\log L$, AIC, and BIC are presented in Table 3, indicating that the power inverse Lindley distribution (PIL) presents a better fit to the data than the other tested distributions.

Regarding the tests shown in Table 4, it is clear that the power Lindley, the generalized Lindley, and the power inverse Lindley distributions fit the data (p-value>0.05), the latter obtaining the lowest test statistics with the largest p-values in three tests.

Empirical and theoretical curves of the survival functions of tested distributions are presented in Figure 8. Graphically, it is also possible to observe that the power inverse Lindley distribution was the one which best adjusted to the data set, obtaining a greater approximation between the empirical and the theoretical curves.

The second data set to be studied was used by Mahmoud and Mandouh (2013) in their work on the transmuted Frechet distribution with three parameters. The data set is of simulated strengths of glass fibers and is presented in Table 2.

Table 2: Data set 2.

1.014	1.081	1.082	1.185	1.223	1.248	1.267	1.271	1.272
1.275	1.276	1.278	1.286	1.288	1.292	1.304	1.306	1.355
1.361	1.364	1.379	1.409	1.426	1.459	1.460	1.476	1.481
1.484	1.501	1.506	1.524	1.526	1.535	1.541	1.568	1.579
1.581	1.591	1.593	1.602	1.666	1.670	1.684	1.691	1.704
1.731	1.735	1.747	1.748	1.757	1.800	1.806	1.867	1.876
1.878	1.910	1.916	1.972	2.012	2.456	2.592	3.197	4.121

Similarly, the power inverse Lindley distribution (PIL) is compared with the transmuted Frechet (TF), the power Lindley (PL), the inverse Lindley (IL), and the Lindley (L) distributions. The values of $-\log L$, AIC, and BIC are presented in Table 3.

The test results presented in Table 4 indicate that only the transmuted Frechet and the power inverse Lindley distributions fit the data (p-value> 0.05).

From the results presented for data set 2, it can be observed that the power inverse Lindley distribution obtained the lowest values from the AIC and BIC criteria. This was different for the values of $-\log L$, but with a very subtle difference from the transmuted Frechet distribution. The same is true relative to the goodness-of-fit tests.

In Figure 9 empirical and theoretical curves of the survival functions of the tested distributions are presented.

Graphically, it is possible to observe that the transmuted Frechet distribution provided a good fit to the data, with very little difference relative to that from the power inverse Lindley distribution.

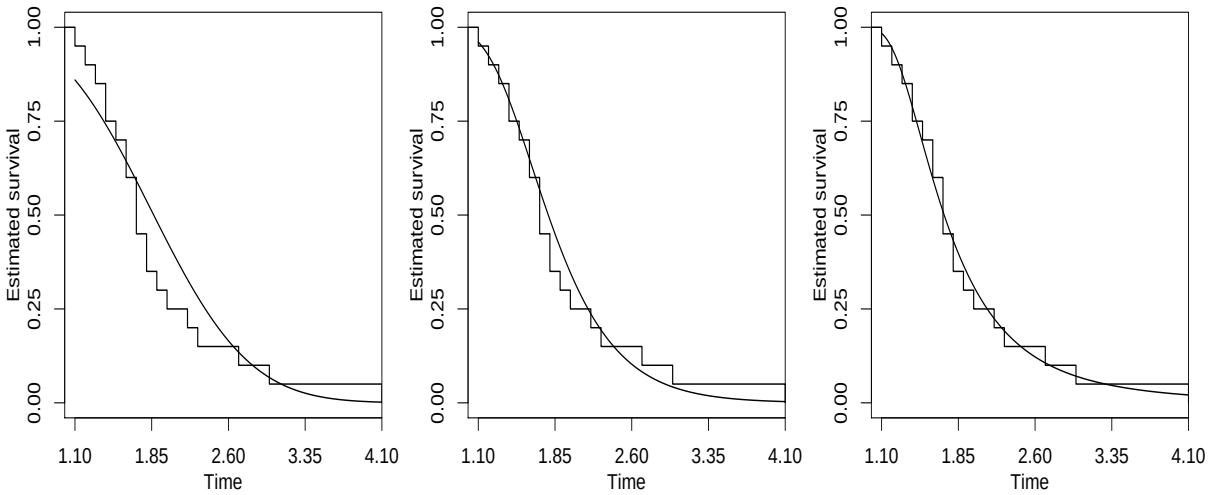
Therefore, it is clear that the power inverse Lindley distribution is a strong competitor to the transmuted Frechet distribution, due to it requiring only two parameters to be estimated.

Table 3: Summary of fitted distributions.

Data set 1					
Model	MLEs	S.E.	$-\log L$	AIC	BIC
L	$\widehat{\beta} = 0.8161$	0.1361	30.2496	62.4991	63.4948
IL	$\widehat{\beta} = 2.2547$	0.4089	31.7572	65.5144	66.5101
PL	$\widehat{\alpha} = 2.2529$	0.3068	20.4320	44.8640	46.8554
	$\widehat{\beta} = 0.3445$	0.0997			
GL	$\widehat{\lambda} = 2.5395$	0.4492	16.4045	36.8089	38.8004
	$\widehat{\alpha} = 27.8765$	19.1608			
PIL	$\widehat{\alpha} = 3.9812$	0.7041	15.4132	34.8263	36.8178
	$\widehat{\beta} = 6.7190$	1.9947			
Data set 2					
Model	MLEs	S.E.	$-\log L$	AIC	BIC
L	$\widehat{\beta} = 0.9383$	0.0890	85.4760	172.9519	175.0950
IL	$\widehat{\beta} = 2.0297$	0.2053	89.3345	180.6689	182.8121
PL	$\widehat{\alpha} = 2.5761$	0.1852	45.1260	94.2521	98.5384
	$\widehat{\beta} = 0.4123$	0.0605			
TF	$\widehat{\mu} = 4.3142$	0.5850	19.3693	44.7386	51.1680
	$\widehat{\sigma} = 1.5491$	0.0655			
	$\widehat{\lambda} = 0.7778$	0.2477			
PIL	$\widehat{\alpha} = 5.3904$	0.5243	20.1115	44.2229	48.5092
	$\widehat{\beta} = 7.1995$	1.2265			

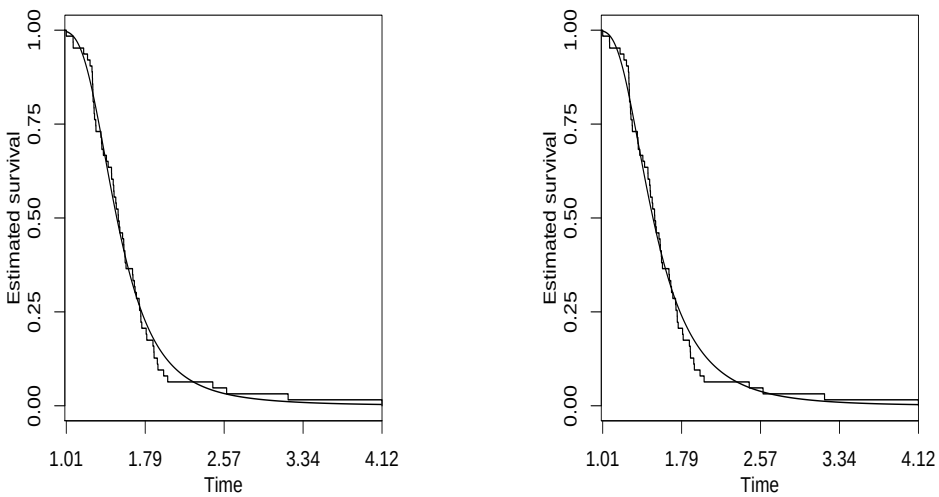
Table 4: Goodness-of-fit tests.

Data set 1						
Model	KS	p-value	AD	p-value	CVM	p-value
L	0.3911	0.0044	3.7504	0.0118	0.7550	0.0086
IL	0.3695	0.0085	4.4689	0.0053	0.9054	0.0036
PL	0.1877	0.4815	1.0369	0.3375	0.1754	0.3225
GL	0.1377	0.8426	0.3344	0.9093	0.0509	0.8764
PIL	0.1031	0.9836	0.1560	0.9982	0.0269	0.9873
Data set 2						
Model	KS	p-value	AD	p-value	CVM	p-value
L	0.4347	2.407e-11	15.6600	9.524e-06	3.2654	6.953e-09
IL	0.4504	3.472e-12	17.3590	9.524e-06	3.6203	6.812e-10
PL	0.1909	0.0175	4.8702	0.0033	0.8078	0.0068
TF	0.0635	0.9472	0.4077	0.8405	0.0530	0.8598
PIL	0.0780	0.8091	0.5389	0.7069	0.0714	0.7445



(a) PL distribution (b) GL distribution (c) PIL distribution

Figure 8: Fitted distributions — data set 1.



(a) TF distribution (b) PIL distribution

Figure 9: Fitted distributions — data set 2.

8. Conclusion

According to the results obtained by the simulation study, one can observe that the maximum likelihood estimators of the power inverse Lindley distribution have good properties, resulting in small values of bias and mean squared error.

Applied to a real data set and compared with other distributions, it is notable that the power inverse Lindley distribution has a good fit to the data, being a strong competitor to the other distributions tested, as well as a good alternative in modeling survival data.

References

Ghitany, M. E., Al-Mutairi, D. K., Balakrishnan, N., Al-Enezi, L. J., 2013. Power lindley distribution and associated inference. Computational Statistics and Data Analysis 64 (0), 20 – 33.

Ghitany, M. E., Atieh, B., Nadarajah, S., 2008. Lindley distribution and its application. Mathematics and Computers in Simulation 78 (4), 493 – 506.

Gradshteyn, I. S., Ryzhik, I. M., 2007. Tables of Integrals, Series, and Products, 7th Edition. Elsevier Academic Press, New York.

Jodra, P., 2010. Computer generation of random variables with lindley or poisson–lindley distribution via the lambert w function. Mathematics and Computers in Simulation 81 (4), 851 – 859.

Lindley, D. V., 1958. Fiducial distributions and bayes' theorem. Journal of the Royal Statistical Society 20 (1), 102 – 107.

Mahmoud, M. R., Mandouh, R. M., 2013. On the transmuted fréchet distribution. Journal of Applied Sciences Research 9 (10), 5553–5561.

Nadarajah, S., Bakouch, H. S., Tahmasbi, R., 2011. A generalized lindley distribution. Sankhya B 73 (2), 331 – 359.

Sharma, V. K., Singh, S. K., Singh, U., Agiwal, V., 2015. The inverse lindley distribution: a stress-strength reliability model with application to head and neck cancer data. Journal of Industrial and Production Engineering 32 (3), 162–173.